UNIVERSIDAD ANDINA DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DOCENCIA UNIVERSITARIA

TESIS

“Cuadernos interactivos, jupyter python notebook y el nivel de aprendizaje del cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II”

PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO

DE MAESTRO EN DOCENCIA UNIVERSITARIA

Presentado por:

Bach: Luis Alberto Vargas Añamaco

Asesor:

Dr. Edwards Jesús Aguirre Espinoza

CUSCO – PERÚ

2021

DEDICATORIA

A Janlui y a Janet, por quitarle un tiempo valioso de nuestras vidas.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar van mis agradecimientos a mi asesor Dr. Edwards Aguirre Espinoza por sus valiosos aportes en el desarrollo de este trabajo. Al Dr. Guido Alvarez Jauregui por el apoyo y las precisiones en este área tan importante de la Matemática superior que es el Cálculo Diferencial.

Resumen

El propósito de la investigación fue determinar los efectos de la utilización de los cuadernos interactivos, software libre, Jupyter Python Notebook, en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes de los primeros ciclos de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco. La investigación es de tipo experimental, de diseño cuasi experimental de pre prueba y pos prueba con grupo de control y otro experimental. Primeramente se aplico la pre prueba a los dos grupos obteniéndose un resultado semejante. Posteriormente se desarrollo el contenido del Cálculo Diferencial con el método tradicional al grupo de control y al grupo experimental se aplico los cuadernos interactivos; finalmente se aplico la pos prueba. Siendo los resultados que el uso de los cuadernos interactivos Jupyter Python Notebook influyen significativamente en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes de los primeros ciclos de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco. El análisis estadístico hecho con el software R y RStudio con la prueba t de student mostró un valor-P=0.000<0.05 y evidencio que los logros de aprendizaje en el Cálculo Diferencial son significativamente mejores del grupo experimental que del grupo control con un nivel de confianza del 95%; y se arriba a la conclusión de los estudiantes que usan los cuadernos interactivos obtienen una media de 17.04 con una desviación de 1.6 frente a una media de 14.1 con una desviación de 1.6 de los estudiantes con el método tradicional.

Palabra clave: Aprendizaje del Cálculo diferencial, Cuadernos interactivos Jupyter Python Notebook.

Abstract

The purpose of the research was to determine the effects of the use of interactive notebooks, free software, Jupyter Python Notebook, in the learning of Differential Calculus in students of the first cycles of the Professional School of Civil Engineering of the Universidad Andina del Cusco university. The research is experimental type, with a quasi-experimental pre-test and post-test design with a control group and an experimental one. First, the pre-test was applied to the two groups, obtaining a similar result. Subsequently, the content of the Differential Calculus was developed with the traditional method to the control group and to the experimental group the interactive notebooks were applied; finally the post test was applied. The statistical analysis made with the R and RStudio software with the t student's test showed a P-value = 0.000 <0.05 and prove that the learning achievements in the Differential Calculus are significantly better in the experimental group than in the control group with a confidence of the 95%; and the conclusion of the students who use the interactive notebooks obtained a mean of 17.04 with a deviation of 1.6 compared to a mean of 14.1 with a deviation of 1.6 of the students with the traditional method.

Keyword: Learning Differential Calculus. Jupyter python Notebooks interactive notebooks.

INDICE GENERAL

Índice de tablas

Índice de figuras

LISTADO DE ABREVIATURAS

CAD	Computer Aided Design – Diseño Asistido por Computadora
CAS	Computer Algebra System – Sistema Algebraico Computacional
GPL	General Public License – Licencia Pública General
IN	Ipython Notebook – Cuadernos de Ipython
JPN	Jupyter Python Notebook – Cuadernos virtuales Jupyter
PSF	Python Software Foundation - Fundación del software Python
R	R is a free software environment for statistical computing and graphics.
TIC	Tecnología de la Información y Comunicación

Capítulo I
INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del Problema

Estudios realizados en muchos países revelan que el aprendizaje de las Matemáticas no es un problema local sino Global. Dentro de nuestra región es común observar los bajos niveles de desarrollo de habilidades y destrezas de aprendizaje en las matemáticas en los diferentes niveles y modalidades de la educación incluyendo a la universidad. La Universidad Andina del Cusco, en sus escuelas de Ingeniería no escapa a esa realidad, es así que la Escuela de formación general evidencia dificultades e inadecuados logros de habilidades dentro de las matemáticas, como lo afirma Aco (2018) "la cantidad de estudiantes con riesgo a desaprobar la misma asignatura de matemática por segunda y tercera vez que es el 37.1%". (pag. 3)

El Cálculo diferencial, después de los estudios de formación general, es aquel área de formación básica de las matemáticas dentro de las escuelas profesionales de ingeniería. Un deficiente aprendizaje del Cálculo diferencial originaría en un primer orden un mal manejo de toda esta teoría a niveles exigidos dentro de temas superiores del Cálculo diferencial de dos o más variables. Las ecuaciones diferenciales modelan aspectos más realistas dentro de la matemática aplicada en los cursos de especialidad y por tanto se observarían pésimos desempeños. En una segunda instancia alguno de los temas dentro del Cálculo diferencial son la razón de cambio, crecimiento de funciones así como la optimización de funciones; estos son tópicos básicos dentro de temas de los cursos de especialidad y está claro una vez más que la deficiencia en el manejo de dichos conceptos afectara al entendimiento y manejo de conceptos derivados en cursos superiores.

Las causas del no logro de las competencias del Cálculo diferencial recaen fundamentalmente en una deficiente formación de la matemática básica. Como se observa a menudo, la matemática se reduce al manejo y aplicación de fórmulas o a la mecanización de procedimientos algorítmicos orientados a ciertos aspectos muy particulares. Olvidando la solución de problemas contextualizados con el apoyo del álgebra, la geometría y trigonometría; y como consecuencia el logro de saberes y conocimientos irrelevantes.

Un diagnóstico a los estudiantes de los primeros ciclos de la Escuela profesional de Ingeniería Civil revela deficiencias del dominio de tópicos del álgebra como la factorización, racionalización y el manejo de las funciones. Son deficientes en la formulación de problemas con el apoyo de la geometría y trigonometría. Así como un mal o nulo uso de formularios matemáticos. Si bien los nuevos enfoques en enseñanza y aprendizaje pueden de alguna manera subsanar algunas de esas deficiencias, el tiempo invertido implicara un tratamiento superficial de los diferentes tópicos del Cálculo diferencial.

En los procesos de enseñanza aprendizaje tanto estudiantes como docentes adolecen en la mayoría de casos comprobados el desconocimiento del manejo, uso y aplicación de herramientas informáticas adecuadas al ámbito del Cálculo diferencial. El uso sostenido de alguna aplicación CAS (Sistema de Álgebra por Computadoras) en los procesos de enseñanza aprendizaje del Cálculo diferencial encaminaría mejores desempeños.

Una consecuencia de no remediar esta problemática implica seguir observado deficiencias en desempeño de cursos avanzados de matemática y en tópicos afines en cursos de especialidad. En estos tiempos la incursión del software y el manejo de un entorno de programación para el modelamiento dentro de varias áreas de especialidad es más común y el uso de las matemáticas para la interpretación de los resultados, la verificación de la teoría, inclusive en aspectos de calibración; cobra mucha importancia. Puesto que muchos modelamientos están fundados sobre la solución de ecuaciones diferenciales (o en diferencias), es decir la presencia matemática es indirecta y su mal manejo o entendimiento eliminaría un criterio básico de certificación o cuestionamiento. Esto es, formaríamos a meros operarios de tecnología.

El aporte de esta investigación persigue que el uso de un software CAS dentro del aula de matemáticas consolide un laboratorio individual para trabajar con todo tipo de objetos matemáticos y el modelamiento de situaciones problemáticas de modo que al experimentar resultados y supuestos estaríamos haciendo matemáticas y el aprendizaje de la misma por ende.

Cuando en el proceso de enseñanza el docente hace uso de diversas estrategias concordantes con las experiencias de los educandos, existe la posibilidad que las cosas que se experimentan quedan fijadas a largo plazo; ante ello cabe la interrogante ¿se puede experimentar con el aprendizaje de las matemáticas?; entonces viene la respuesta, de Si.

Ello implica la búsqueda de alternativas basadas en la experiencia docente, el desarrollo de la pedagogía y la didáctica, como es el caso de estrategias convencionales del uso de la pizarra y plumón, otros el cuaderno y lapicero, o las calculadoras tradicionales; y en otros caso la posibilidad de acceder a la tecnología de actualidad como el cálculo simbólico, en el que se puede utilizar los algoritmos implementados en los programas informáticos con soporte de álgebra por computadora (CAS), que posibilita verificar resultados casi de forma instantánea, generar gráficos, comprobar propiedades, teoremas como también redactar texto científico. De esta forma se podrían abordar temáticas desde un contexto básico hasta un contexto profesional. Las materias afines son las matemáticas básicas, cálculo diferencial e integral en una o más variables, ecuaciones diferenciales, estadística e investigación de operaciones. Prosiguiendo de esta forma se podrían abordar tópicos de la matemática aplicada de materias propias de la especialidad.

Dentro de la oferta de programas CAS, se necesita un auténtico entorno para la experimentación de las matemáticas, en particular del Cálculo diferencial. Los cuadernos interactivos Jupyter Python Notebook, aparecen en el escenario y proporciona un entorno de trabajo flexible, que se ajusta perfectamente a las necesidades e interés de aprendizaje del estudiante, brindándole un cuaderno de apuntes y mecanismos para la generación de cálculos y gráficos científicos. Este entorno también integra potentes lenguajes de programación, que son la herramienta fundamental para todo profesional de las ingenierías; es decir tenemos a disposición herramientas para formar un ecosistema que se puede explotar desde diversas aristas para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas, fundamentalmente el Cálculo Diferencial que es la base de las Matemáticas superiores.

1.2 Formulación de Problemas

1.2.1 Problema general

¿En qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, influyen en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II?

1.2.2 Problemas Específicos

a) ¿En qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran la capacidad de resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II?

b) ¿En qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran el manejo de conceptos del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II?

c) ¿En qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran la capacidad de modelar problemas del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II?

1.3 Justificación

1.3.1 Conveniencia

La utilización de la herramienta interactiva Jupyter Python Notebook como recurso didáctico en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes de los primeros ciclos de ingeniería civil de la Universidad Andina del Cusco es de suma importancia, aún más cuando no hay otro estudio de este tipo realizado en esta institución. Esto permite conocer si los docentes manejan esta herramienta didáctica para lograr mejorar el aprendizaje en las asignaturas de matemáticas. Es necesario hacerlo en los estudiantes de los primeros ciclos de estudio, ya que la escuela profesional de ingeniería de la universidad fundan su currícula sobre las matemáticas superiores, el Cálculo Diferencial es la base fundamental para sustentar todo ese conocimiento. Este estudio sirve para establecer si el uso de esta herramienta digital, Jupyter Python Notebook, contribuye al proceso de fortalecer el aprendizaje del Cálculo diferencial. También construirá en los estudiantes un modelo para que ellos mismos elaboren su propio material digital para futuros contenidos como el Cálculo integral, Cálculo diferencial e integral en dos o más variables, Cálculo diferencial e integral de funciones vectoriales, Ecuaciones diferenciales.

1.3.2 Relevancia social

En la sociedad de la comunidad educativa universitaria y de su entorno, es de vital importancia. Por un lado, ayudará a desarrollar sus habilidades para el manejo de herramientas educativas interactivas, como los Jupyter Python Notebooks, por otro lado, fomentará la investigación, ya que esta herramienta interactiva propicia la práctica de destrezas específicas en la búsqueda de información y en la elaboración de análisis de los investigado, así como en la presentación de informes sobre el resultado. Esto hará que se vayan formando personas acuciosas, críticas en el aprendizaje del Cálculo diferencial.

1.3.3 Implicancias prácticas

Los beneficiarios directos de este estudio del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco y los docentes de matemáticas, pero de manera indirecta se ayuda en el descubrimiento del mundo de los recursos de las TIC a los demás docentes y todos los estudiantes de la institución. Los beneficios se darán en el hecho de que los docentes estarán en condiciones de preparar su propia herramienta interactiva, los Jupyter Python Notebook y aplicarlos a cualquier área de las ciencias y los estudiantes lograrán desarrollar sus destrezas en el manejo de las TIC y mejorar su rendimiento en el conocimiento de la matemática, no como ciencia abstracta, sino como ciencia viva que se aplica a todas las áreas del conocimiento humano.

Python es un lenguaje de programación que cuenta con módulo adicionales para otras áreas de la matemática aplicada como la estadística, finanzas. Los investigadores y expertos presentan y publican sus resultados usando esta herramienta interactiva, los Jupyter Python Notebooks.

Somos una sociedad con bajo rendimiento en las matemáticas, vivimos en una era digital, las computadoras personales son más accesibles, tenemos a disposición software libre y la computación en la nube está al alcance con las mejoras del servicio de Internet.

Por tanto, usando todos estos recursos daremos un paso hacia comprender, modelar y manejar las matemáticas aplicadas, presentes en todas las ciencias.

1.3.4 Valor teórico

Los cuadernos interactivos Juper Python Notebooks, dentro del Cálculo diferencial se pueden utilizar como medio de comunicación ya que se pueden construir dentro de sus hojas tal cual las hojas de un libro de matemáticas, más aún estos pueden distribuirse y alojar en servidores mostrando toda su interactividad. También se pueden utilizar como herramienta de trabajo ya que apoya a la confección de materiales electrónicos que realizan cálculos, tablas o gráficos. El docente lo utiliza como recurso didáctico durante el desarrollo de su clases para profundizar un contenido a través del repaso o la ejercitación, evaluar al estudiante. Por último como elemento innovador, al resolver problemas, ya que gracias a su lenguaje de programación es posible modelar y realizar simulaciones.

Esto es, los cuadernos interactivos son mediadores instrumentales dentro de la teoría de Vigotsky.

1.3.5 Utilidad metodológica

Los cuadernos interactivos pueden ser utilizados como una herramienta de apoyo para la experimentación del aprendizaje del cálculo diferencial, así como en otras áreas de la matemática, donde el cálculo simbólico es predominante.

1.4 Objetivos de Investigación

1.4.1 Objetivo General

Determinar en qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, influyen en el nivel de aprendizaje del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

1.4.2 Objetivos Específicos

a) Determinar en qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran la capacidad de resolución de ejercicios del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

b) Determinar en qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran el manejo de conceptos del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

c) Determinar en qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran la capacidad de modelar problemas del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

1.5 Delimitación del estudio

1.5.1 Delimitación espacial

La investigación se realizó en la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco, cito en la urbanización Larapa grande del distrito de San Jerónimo de la ciudad del Cusco.

1.5.2 Delimitación temporal

La investigación se hizo entre los meses de agosto a octubre del 2019, correspondiente al semestre 2019-II, con los estudiantes del tercer ciclo de estudios de la escuela profesional de Ingeniería Civil.

Capítulo II
MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes de Estudios

2.1.1 Antecedentes Internacionales

A nivel internacional tenemos:

Irazoqui (2014), “El aprendizaje del cálculo diferencial: una propuesta basada en la Modularización”, en la universidad de Bio Bio para optar el grado de doctor, estudio de tipo cuantitativo, con diseño experimental, con la población de estudiantes de la carrera de Pedagogía en Ciencias Naturales, hizo uso de técnica de encuesta y el instrumento cuestionario, habiendo arribado a la conclusión:

- La propuesta de aplicación del diseño curricular modular que permitió cumplir con el Objetivo General de la presente tesis al probar in situ mejores rendimientos académicos de los estudiantes sometidos al diseño curricular modular en contraste con aquellos estudiantes que no se vieron bajo esta modalidad de trabajo.

Barreno, Román y Olalla (2017). “Software libre matemático y su incidencia en el aprendizaje del cálculo diferencial” en la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE extensión Latacunga con un diseño cuasi experimental, se utilizó una muestra de estudiantes del primer semestre de la carrera de ingeniería Automotriz, para el grupo control 24 estudiantes y para el grupo experimental 30 estudiantes de la asignatura de Cálculo Diferencial. Es así que al grupo experimental se aplicó la metodología didáctica basada en la resolución de problemas mediante la utilización del software libre matemático Geogebra y Maxima. Para la recolección de datos se utilizaron los instrumentos: cuestionarios, test, evaluaciones escritas y desarrollo de prácticas experimentales con la utilización del software libre. La conclusión obtenida fue:

- La utilización del software libre matemático si incide en el rendimiento académico de los estudiantes, demostrando un mejor rendimiento académico que implica un aprendizaje significativo.

Serrano, Garzón, González y Cervantes (2020). “El laboratorio computacional matemático, como complemento para promover el aprendizaje del cálculo diferencial” en la Universidad Técnica de Machala, a través de un diseño experimental de tipo comparativo, se utilizó una muestra de estudiantes del segundo semestre de la carrera de Ingeniería Acuícola, para el grupo control 38 estudiantes y para el grupo experimental con 50 estudiantes. Se usó la técnica de encuesta y cuestionario como instrumento, llegando a la conclusión:

- El rendimiento académico del grupo control evidencio ser menor que del grupo experimental.

2.1.2 Antecedentes Nacionales

A nivel nacional tenemos los siguientes estudios:

Guevara (2017), “Modelo heurístico – divergente para desarrollar el aprendizaje del cálculo diferencial”, en la universidad nacional Pedro Ruiz Gallo para optar el grado de doctor, estudio de tipo de estudio aplicado, con diseño cuasi experimental, con la población de estudiantes matriculados en el Ciclo 2016-I e la Escuela Profesional de la Facultad de Ciencias Económicas y Contables de la UNPRG de Lambayeque, en la asignatura de Matemática General, que contiene el Cálculo Diferencial, hizo uso de la técnica de encuesta y el instrumento cuestionario habiendo arribado a las conclusiones:

- Se ha analizado y descrito la problemática de los estudiantes, se elaboró el marco teórico científico con la Teoría Heurística de George Polya, se construyó y aplicó el Modelo Heurístico – Divergente dando resultado positivo como lo demuestra el examen post test y el producto acreditable como logro alcanzado en su aprendizaje del Cálculo Diferencial.

Mendoza (2017), “Trabajo en equipo en el aprendizaje de derivadas en estudiantes de la Universidad Nacional del Altiplano-Puno”. en la universidad Nacional del Altiplano Puno para optar el grado académico de magister, estudio de tipo aplicada con diseño Cuasi experimental con Pre prueba y Pos prueba, con grupo de control aleatorio, con la población de estudiantes del segundo semestre de la Escuela profesional de Biología de la Universidad Nacional del Altiplano Puno durante el semestre académico 2015–II, hizo uso de la técnica de observación y prueba usando los instrumentos de guías de observación y pre y pos prueba habiendo arribado a las siguientes conclusiones:

- Si, se determina el efecto que produce la aplicación del trabajo en equipo en el aprendizaje de derivadas en estudiantes de biología de la Universidad Nacional del Altiplano Puno.
- Si, se establece el aprendizaje conceptual de derivadas en estudiantes de la facultad de biología.
- Si, se comprueba la eficacia del trabajo en equipo en el aprendizaje por capacidades en la resolución de ejercicios y problemas de derivadas.
- En el aspecto de actitudes se observa que los estudiantes presentan mucho más interés en el desarrollo de las sesiones al aplicar el trabajo en equipo.

Vazquez (2017) “Utilización de un entorno virtual de enseñanza y aprendizaje en el cálculo diferencial de una variable con aplicaciones a la economía” en la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann, esta Investigación se enmarca dentro del paradigma Cuantitativo y corresponde a una investigación de naturaleza explicativa, se utilizó una muestra de 50 estudiantes elegidos intencionalmente de la Cátedra Matemática I de las escuelas profesionales de Ciencias Contables y Financieras y Ciencias Administrativas. Se usó la técnica de encuesta y luego de aplicar los cuestionarios presenciales y virtuales, los desarrollos de los ejercicios y las opiniones sobre los temas de debate se arribó a la conclusión que:

- El uso de las tecnologías informáticas es un apoyo muy importante en el proceso de la enseñanza-aprendizaje.

Valverde (2018), "Los Registros de Representación Semiótica en el aprendizaje del Cálculo Diferencial, estudio de caso, en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Ambiental de la Universidad Nacional de Ingeniería", en la Universidad Nacional de Educación para optar el grado de maestro, estudio de tipo descriptivo-explicativo, con diseño Estudio de casos – Panel, con la población de estudiantes de nuevo ingreso a las especialidades de Ingeniería Ambiental e Ingeniería de Higiene y Seguridad Industrial de la Universidad Nacional de Ingeniería de Lima, Perú, hizo uso de técnica de análisis documental y el instrumento es la producción del rendimiento del estudiante en situación de evaluación de aprendizaje, habiendo arribado a las conclusiones:

- Los estudiantes muestran un nivel medio en el conocimiento de las reglas de conformidad para realizar transformaciones de tratamiento en temas de cálculo diferencial.
- Los estudiantes muestran deficiencia en el conocimiento de reglas de formación de objetos matemáticos involucrados en el cálculo diferencial.
- Los estudiantes muestran deficiencia en el conocimiento de los criterios de congruencia para interpretar, en registro literal, representaciones algebraicas.

Yanapa (2020). "Aplicación de videos tutoriales para mejorar el aprendizaje de límites y derivadas en los estudiantes del II Semestre de la Escuela Profesional de Ingeniería

Ambiental de la Universidad Católica de Santa María, Arequipa, 2018", tesis para optar el grado de Maestro en Educación Superior, se usó un diseño cuasi experimental, se utilizó una muestra de 50 estudiantes del II semestre, matriculados en el curso de Cálculo Diferencial, en el año 2018, de los cuales 25 estudiantes formaban el grupo control y el resto el grupo experimental. Se usó la técnica de encuesta y luego de aplicar el instrumento cuestionario en el pre y pos test a los grupos experimental y control se concluyó:

- Que efectivamente la aplicación de videos tutoriales tiene una mejora significativa en el aprendizaje de límites y derivadas.

2.2 Bases Teóricas

2.2.1 TIC en la educación

En los últimos años el avance de las Tecnologías de la Comunicación y la Información (TIC) ofrecen nuevos recursos que pueden ser integrados en los planes de estudio y en los procesos de enseñanza aprendizaje de las escuelas de ingeniería de la Universidad Andina del Cusco.

Riveros y Mendoza (2005), en su artículo Bases teóricas para el uso de las TIC en Educación, sostienen que las TICs:

> Posibilitan la profundización de conocimientos en el quehacer educativo; constituyen un medio excelente para cuestionar ciertas prácticas pedagógicas que se realizan en el aula; incrementan notablemente la participación y la interacción de los alumnos, logrando su integración en situaciones de aprendizaje.
>
> Permiten desarrollar proyectos pedagógicos en mucho menor tiempo, con un proceso de diseño más efectivo y simplificado debido a que los docentes y alumnos tienen a su alcance una gran cantidad de herramientas de información y comunicación.

> Deben facilitar al alumno la oportunidad de explorar un mundo donde él pueda simular cualquier área de conocimiento y al mismo tiempo intervenir en el medio que lo rodea a través del desarrollo de temas significativos e importantes. (p. 334)

Como docentes no podemos escapar de ello estando obligados a actualizarnos, capacitarnos y adecuar nuestras materias en lo que respecta a la aplicación de las TIC.

Con estos beneficios y cambios, a nuestra Universidad corresponde:

> Fomentar y desarrollar nuevas estrategias para el uso de la tecnología como apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje; por tanto, necesita renovarse dando respuesta a las variadas demandas sociales y laborales.
>
> Incorporar recursos tecnológicos, favoreciendo el aprendizaje en los alumnos en función de estrategias metodológicas relacionadas con: a) mayor dominio en la escritura; b) incremento de tiempo de atención y de tiempo de estudio; c) desarrollo de habilidades de razonamiento; d) desarrollo de la creatividad; e) mayor espíritu de cooperación y participación; y, f) creciente espíritu de investigación. (Riveros y Mendoza p. 335)

El elemento fundamental dentro de las TIC es el computador, incorporarlo como medio de apoyo a la enseñanza, aprendizaje y beneficia:

a) Como herramienta intelectual, el computador, permite incorporar activamente estrategias pedagógicas para mejorar el proceso instruccional tales como: la interacción, la atención individual, la amplificación de experiencias de los estudiantes y autocontrol del aprendizaje.

b) El estudiante puede ser atendido individualmente por el docente.

c) El uso del computador favorece la capacidad de sumar experiencias del estudiante, esto es, puede modelar y construir pequeños mundos que el mismo puede controlar.

d) Permite que el estudiante establezca y siga su ritmo de aprendizaje. El tiempo destinado a procesar un tema de aprendizaje puede ser reajustado según sus necesidades y ritmo de aprendizaje del propio estudiante.

2.2.2 TIC en la matemática

La matemática, es una de las áreas fundamentales en la formación básica, en los primeros ciclos de los estudios de ingeniería e influye sobre las estructuras mentales de los estudiantes en forma directa, por lo que requiere de un proceso de enseñanza y aprendizaje que facilite un desarrollo lógico matemático de forma apropiada. Sin embargo, se observa que el docente en aula, en la mayoría de los casos, hace uso casi exclusivo de la estrategia expositiva, anulando la participación constructiva del estudiante y limitando todo tipo de interacción dentro del aula, así como el uso de los modernos medios y recursos tecnológicos que podemos encontrar fuera de ella.

Riveros (2011), en su artículo Las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de instrucción matemática, manifiestan que las TIC contribuyen al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en:

El alumno interactúe con los objetos matemáticos de forma simple y natural, favoreciendo su autonomía en el aprendizaje.

El estudiante aprende a más velocidad y con mejores fundamentos, puesto que las TIC facilitan la presentación gráfica de los conceptos y procedimientos matemáticos, haciendo que el proceso de aprendizaje sea más dinámico.

El participante, en este contexto virtual, dispone de herramientas que le permiten construir objetos matemáticos, conjeturar hipótesis, comprobar propiedades, simular y descubrir regularidades; ampliando así el abanico de ejemplificaciones, evitando la ejecución de cálculos tediosos.

> La Internet, por otro lado, agiliza la búsqueda de información sobre infinidad de aspectos relacionados con el mundo del saber matemático en un entor no cercano al alumno, además de fomentar en él el deseo de saber más sobre la praxis matemática. (p. 128)

Los avances y evolución de las TIC modificarán de forma continua el proceso del que hacer dentro y fuera del aula universitaria; contribuyendo a la mejorara de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, mediante la aplicación de proceso novedosos de carácter tecnológico.

Se ha verificado que la tecnología acelera la capacidad de proceso de la mente humana, por ese motivo se debe utilizar para agilizar algoritmos matemáticos con mucha carga procedimental y en procesos de simulación.

Las TIC modelan escenarios propicios para los estudiantes, de modo que estos puedan recrear experiencias matemáticas difíciles de reproducir con los medios convencionales como el lápiz y el papel; aplicacicando estas técnicas realiza actividades de exploración permitiendole manipular directamente los objetos matemáticos y así enfrentar diferentes situaciones problemáticas relacionados a su área de estudios, dándole solución.

La aplicación de las TIC dentro del contexto de las matemáticas y con fines educativos se debe fundar en conocimientos teóricos y prácticos de los participantes dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje directamente ligados al material didáctico, logros de aprendizaje y capacidades de los estudiantes.

Finalmente, el uso apropiado de las TIC en las clases de matemática se transforman en un laboratorio experimental, donde los estudiantes dado una situación problemática, exploran alternativas de solución utilizando tecnología y conocimientos teóricos.

2.2.3 Software educativo

Marqués (1996), denomina también programas educativos o programas didácticos. Son programas de ordenador creados con un fin específico de ser utilizados como medio didáctico, es decir, como medio para facilitar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Esta definición engloba a los programas que han estado elaborados con fin didáctico, desde los tradicionales programas basados en los modelos conductistas de la enseñanza, los programas de Enseñanza Asistida por Ordenador, hasta los programas de Enseñanza Inteligente Asistida por Ordenador, que, utilizando técnicas propias del campo de los Sistemas Expertos y de la Inteligencia Artificial, pretenden imitar la labor tutorial personalizada que realizan los profesores y presentan modelos de conocimiento en concordancia con los procesos cognitivos que desarrollan los estudiantes.

Sin embargo, escapan de esta definición programas de uso general que se le ha dado un uso didáctico como son los procesadores de textos, hojas de cálculo, editores gráficos.

2.2.3.1 Característica del programa educativo

Los programas educativos pueden estar enfocados a diversas áreas como matemáticas, idiomas, manufactura y ofrecer entornos de trabajo asequibles a los estudiantes con mayor o menor grado de interacción.

Son elaborados con una finalidad didáctica y utilizan el ordenador como soporte para que los estudiantes realicen actividades y en periodos de desarrollo recientes están diseñados con el modelo de computación en la nube, es decir Internet es el proveedor de servicios informáticos.

El software educativo son interactivos, responden inmediatamente a los requerimientos y permiten un diálogo y un intercambio de información con los estudiantes con los cuales individualizan el trabajo adaptándose a su ritmo de trabajo, adaptando actividades según su perfil y nivel de conocimiento. En cuanto a su accesibilidad y manejo presentan un Interface de usuario amigable y minimalista, aunque para realizar tareas complejas estos programas tiene sus propias reglas de sintaxis, semántica y flujo de trabajo que son necesarios conocer.

2.2.3.2 Estructura básica de los programas educativos

La mayoría de los programas didácticos tienen tres módulos principales: el módulo que gestiona la interacción con el usuario, la base de datos y el algoritmo.

La Interface de usuario, es el entorno a través del cual el programa establece el diálogo con el operador humano y es el que posibilita la interactividad característica, se integra por dos subsistemas. El subsistema programa-usuario, facilita la transmisión de información al usuario por parte del ordenador, incluyen los periféricos de salida como son las pantallas, altavoces, impresoras, trazadores gráficos en general son los convertidores digitales analógicos. El subsistema usuario-programa, facilita la transmisión de información del usuario hacia el ordenador, incluyen los periféricos de entrada como son el teclado, ratón, micrófono, pantallas táctiles, lápices ópticos, lectores de tarjetas en general son los convertidores analógicos digitales. Con la ayuda de las técnicas de la Inteligencia Artificial y el desarrollo de las tecnologías multimedia, estos entornos de interacción cada vez son más intuitivos y capaces de exhibir un lenguaje natural.

Las bases de datos, contienen la información específica que cada programa presenta a los operadores humanos, se constituyen de:

- Modelos de comportamiento que representan la dinámica de los sistemas. Incluyen modelos físico-matemáticos, que tienen unas leyes perfectamente establecidas por medio de ecuaciones y modelos no deterministas, regidos por comportamientos aleatorios, por grafos y por tablas de comportamiento.

- Datos con información alfanumérica y información multimedia, es decir compuestos por dibujos, fotografías, secuencias de video, sonidos, secuencias musicales.
- El algoritmo del programa, en función de las acciones de los operadores humanos, gestiona las secuencias en que se presenta la información de la base de datos y las actividades que pueden realizar los usuarios con distintos flujos de trabajo. El flujo lineal, cuando la secuencia de actividades es única; el flujo ramificado, cuando están concebidas posibles secuencias según las respuestas del usuario; el flujo tipo entorno, cuando se establecen diferentes actividades con secuencias no predeterminadas, el usuario elige que hace y cuando lo ha de hacer; el flujo tipo sistema experto, cuando el programa tiene implementado un código de inferencias, y mediante un dialogo bastante inteligente con el usuario, asesora o tutoriza el aprendizaje.

2.2.3.3 Clasificación de los programas didácticos

Los programas educativos a pesar de tener una estructura general común se presentan con características muy diversas: unos se presentan como laboratorios, como bibliotecas, calculadoras, máquinas de escribir, como un juego, como un libro o como un examen.

Programas tutoriales, son programas que en mayor o menor medida dirigen, tutorizan, el trabajo de los alumnos. Son programas basados en planteamientos conductistas de la enseñanza que comparan las respuestas de los usuarios con los patrones que tienen implementados como correctos, guían los aprendizajes de los estudiantes y facilitan las prácticas e implementan exámenes donde se considera la retroalimentación en caso de resultados negativos.

Programas tutoriales lineales, presenta la información y/o ejercicios al usuario siguiente un patrón único o aleatorio con la independencia de las respuestas. Se trata de una enseñanza programada y se caracteriza por una interactividad pobre.

Programas tutoriales ramificados, basados en el nivel conductista, siguen recorridos pedagógicos según criterios establecidos y según el comportamiento del usuario, ofrecen mayor interacción y exigen mayor esfuerzo de los usuarios. Se trata de programas multinivel y se caracterizan por estructurar sus contenidos en niveles de dificultad.

Entornos tutoriales, basados en modelos pedagógicos cognitivistas, y proporcionan herramientas de búsqueda y proceso de información a los usuarios. Se trata de los entornos de resolución de problemas, donde los usuarios conocen parcialmente las informaciones necesarias para su resolución y han de buscar la información restante al aplicar reglas, leyes y operaciones. El programa comprueba la solución tomando en cuenta la idoneidad en la obtención del resultado. Los programas de elaboración de circuitos eléctricos, electrónicos pertenecen a esta categoría.

Sistemas tutoriales expertos, elaborados con las técnicas de la Inteligencia Artificial y considerando las teorías cognitivas del aprendizaje. Guían a los estudiantes en una secuencia de su proceso de aprendizaje, analizan su estilo de aprender y sus errores y proporcionan un camino de aprendizaje más conveniente al usuario.

Bases de datos, son programas que proporcionan datos organizados, en un entorno estático, según determinados criterios, y facilitan su exploración y consulta selectiva. Se emplean en múltiples actividades como la selección de datos para resolver problemas, analizar y relacionar datos, extraer conclusiones, comprobar hipótesis. Las bases de datos tienen estructura jerárquica o relacional o documental, en este último caso almacena grandes volúmenes de información como revistas, periódicos, libros.

Simuladores, son programas que posibilitan un aprendizaje significativo por descubrimiento y la interacción e investigación de los usuarios realizan en tiempo real. Se caracterizan por tener implementados modelos físico-matemáticos deterministas, así como reglas de comportamiento social. Pertenecen a esta categoría los Simuladores de vuelo.

Constructores, son programas que tienen un entorno programable, facilitan al usuario elementos simples con los cuales se pueden construir objetos más complejos. De esta manera potencian el aprendizaje heurístico, facilitan al usuario la construcción de sus propios aprendizajes, que resultan del diseño y verificación de sus programas. A esta categoría pertenecen los lenguajes de programación, como el Logo, Smalltalk, C, Java, R, Python, Julia, Kotlin, que ofrecen unos “laboratorios simbólicos” en los cuales se pueden construir un ilimitado número de entornos, así, desarrollar tópicos de la computación científica hasta robótica, claro está con el apoyo de hardware apropiado. Los usuarios se convierten en instructores de los ordenadores. En lo que concierne a este proyecto de investigación se utilizara el lenguaje Python.

Programas herramientas, son programas destinados para trabajos generales como escribir, organizar, calcular, dibujar, transmitir información. Estos programas son utilizados en el mundo laboral y que están fuera del contexto del software educativo. Podemos clasificarlos como procesadores de texto, gestores de bases de datos, hojas de cálculo, editores gráficos, programas de comunicaciones, programas de experimentación asistida, programas de sistemas autor.

2.2.3.4 Funciones del software educativo

Los programas didácticos realizan funciones básicas propios de los medios didácticos que según la forma de uso que le asigne un profesor pueden proporcionar funcionalidades específicas en determinados contextos de acuerdo a una organización planificada.

Función informativa, los programas en sus actividades presentan informaciones estructuradas de la realidad a los usuarios. Los programas tutoriales, simuladores y las bases de datos realizan activamente esta función.

Función instructiva, todos los programas educativos orientan y regulan el aprendizaje ya que tienen preconcebidos objetivos educativos específicos guiados por sus actividades, las que son encaminadas en función de las respuestas y progresos de los usuarios. Es decir, el ordenador actúa como mediador en la construcción del conocimiento y metaconocimiento del estudiante. Los programas tutoriales realizan esta función de una forma más explícita.

Función motivadora, es una de las características más destacadas de este tipo de material didáctico, ya que los estudiantes son atraídos e interesados por sus interfaces de usuario ya que han sido diseñados para captar la atención, mantener el interés y por supuesto encaminarlos a aspectos más importantes de las actividades. Esta función es la más valorada por los profesores.

Función evaluadora, la interactividad propia de estos materiales hace posible obtener el resultado inmediato de las actividades y se ajustan perfectamente para evaluar el trabajo que se está realizando con los usuarios. Muchos programas presentan en su diseño módulos de evaluación, esto cumpliría una función explícita de la evaluación, pero el usuario al detectar sus propios errores, se cumpliría una evaluación implícita.

Función investigadora, los programas del tipo bases de datos, simuladores y programas constructores, ofrecen a los usuarios excelentes ambientes donde investigar: buscar información, cambiar datos, etc.

Función expresiva, los programas implementan amplias posibilidades para la expresión humana ya que son máquinas que procesan símbolos, con los cuales los usuarios representan conocimiento, esto es específicamente alto, cuando usan los lenguajes de programación. Un aspecto a resaltar es que los ordenadores no aceptan ambigüedades, de este modo, los usuarios están obligados a precisar de mejor forma sus mensajes.

Función metalingüística, con la interacción de los sistemas operativos (Windows, Linux, MacOS) y los lenguajes de programación los usuarios aprenden los lenguajes propios de computación e informática.

Función lúdica, desarrollarse con los ordenadores realizando actividades educativas es una labor que a menudo tiene connotaciones lúdicas y festivas. Algunos programas implementan actividades lúdicas, con lo que se potencia esta función.

Función innovadora, los programas didácticos al estar a la vanguardia de la tecnología con muy diversas formas de uso y de acceso, posibilitarían una amplia experimentación didáctica e innovación educativa.

El uso del Lenguaje de programación Python dentro de este proyecto de investigación presenta dos funciones del software educativo: Expresiva y Metaligüistica.

Dentro del mundo del software didáctico para las Matemáticas existen diversidad de productos entre comerciales y de código abierto. En contexto del proyecto de tesis serían apropiados los siguientes productos:

Maple es un programa orientado a la resolución de problemas matemáticos, capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional. Fue desarrollado originalmente en 1981 por el Grupo de Cálculo Simbólico en la Universidad de Waterloo en Waterloo, Ontario, Canadá. Desde 1988 ha sido mejorado y vendido comercialmente por Waterloo Maple Inc. (también conocida como Maplesoft), compañía canadiense con sede en la misma localidad. La última versión es Maple 2020. Maple se basa en un pequeño núcleo escrito en lenguaje C, que proporciona el lenguaje Maple. Maple es un lenguaje de programación interpretado. Las expresiones simbólicas son almacenadas en memoria como grafos dirigidos sin ciclos. La mayoría de funcionalidades son proporcionadas por bibliotecas: unas escritas en lenguaje Maple, con acceso a su código fuente; pero también hace uso de otras bibliotecas bien conocidas como las NAG, ATLAS o GMP.

Mathematica es un programa utilizado en áreas científicas, de ingeniería, matemática y áreas computacionales. Originalmente fue concebido por Stephen Wolfram, quien continúa siendo el líder del grupo de matemáticos y programadores que desarrollan el producto en Wolfram Research, compañía ubicada en Champaign, Illinois. Comúnmente considerado como un sistema de álgebra computacional, Mathematica es también un poderoso lenguaje de programación de propósito general.

Ambos productos cuentan con capacidades de cálculo simbólico, capacidades gráficas e interfaces notebooks, estos productos comerciales para ser utilizados deben contar con licencias de uso, las cuales son restrictivas en cuanto al uso y a la distribución. Necesitamos por tanto una alternativa, software que sean equivalentes a estos productos comerciales con añadido de tener libertades para la distribución y el uso.

2.2.4 Software libre

Valverde (2005) sostiene que el software libre se puede entender el acceso ilimitado e irrestricto a la creación intelectual en el campo de los programas destinados a las TIC, donde quiera que aquella se lleve a cabo y cualesquiera sean los propósitos para los que fue pensada.

Un programa será software libre, si se presentan las siguientes libertades:

- La libertad de usar el programa, con cualquier propósito (libertad 0).
- La libertad de estudiar cómo funciona el programa, y adaptarlo a tus necesidades (libertad 1). El acceso al código fuente es una condición previa para esto.

- La libertad de distribuir copias, con lo que usted puede ayudar a su vecino (libertad 2).
- La libertad de mejorar el programa y hacer públicas las mejoras a los demás, de modo que toda la comunidad se beneficie (libertad 3).

En este sentido se observa que tenemos la libertad de utilizar estos programas en distintos ámbitos para múltiples propósitos. Tendríamos la libertad de adaptarlos, (reprogramarlos, o recunfigurarlos), desde luego si tenemos las habilidades necesarias para hacerlo. Somos libres de distribuir copias originales o modificadas inclusive de darle un valor comercial.

Challenger et al. (2014), sostienen que el Software libre se ha convertido en uno de los movimientos tecnológicos de mayor auge en el siglo XXI. Para su desarrollo ha sido necesario contar con un grupo de herramientas que hagan óptima su utilización y sean fáciles de aprender.

Python es un lenguaje de programación que cumple con lo planteado y se viene perfilando como una opción recomendada para el desarrollo de Software libre. Es decir, nuestra filosofía de libertad la mantendremos utilizando aquella poderosa herramienta, generadora de más software, que realice nuestros cálculos matemáticos, en los cuadernos digitales, donde plasmaremos y desarrollaremos nuestros conocimientos, dando solución a problemas elementales y porque no a temas profundos de la ingeniería y de la matemática aplicada.

Richard Stallman (2003) ha escrito un texto sobre las razones por las que las escuelas deberían utilizar exclusivamente software libre. El software libre, recuerda Stallman, permite que los usuarios controlen lo que hacen sus ordenadores y cooperen entre ellos. Las dos razones son también válidas para la educación, Pero hay razones netamente “educativas”.

Afortunadamente hace varias décadas están evolucionando proyectos de software libre, los cuales son desarrollados por una comunidad de programadores que dan soporte y sobre todo aportan para el continuo desarrollo. Estos productos en la mayoría de los casos cuentan con licencias de uso que permiten libertades entre estas tenemos, a la libre distribución, libre uso, además se pone a disposición el código fuente que muchos usuarios finales pueden utilizar para escribir nuevos módulos, para escribir componentes adicionales que interactúen con otros entornos o que formen parte de otros sistemas; una consecuencia clara de esto es que pueden ser ejecutados en todos los sistemas operativos incluyendo en entornos móviles. La evolución constante de estos productos es consecuencia de la aparición de nuevas tecnologías, dentro de esto podemos mencionar a la universalización del lenguaje de programación Python, la computación en la nube. Una característica que no se puede ocultar de estos proyectos de software libre, es que siempre están a la saga del software comercial y no cuentan con soporte técnico; pero nuestro carácter investigador hará que buscando en los foros, blogs o actualizaciones de versión encontremos la solución exacta o aproximada de nuestras necesidades. Como una muestra de este desarrollo, estando a una semana del fin del año 2020, re escribo estas líneas en la versión 7.0 de LibreOffice Writer, corriendo en la última versión del sistema operativo Linux Mint 20.1, Ulyssa.

En lo que respecta a la composición de texto, es necesario disponer de un lenguaje, no un producto software, que pueda ser utilizado en computadoras personales y en la web, además que incluya mecanismos para materializar fórmulas matemáticas.

La comunidad científica por ejemplo utiliza LaTeX, la cual es un sistema de composición de textos, orientado a la creación de documentos que presenten alta calidad tipográfica con la capacidad de inclusión de expresiones matemáticas y la generación de gráficos, es por eso que es utilizado en la generación de artículos y libros científicos. Una de las distribuciones más populares de LaTeX para todos los sistemas operativos es Tex Live, el cual se estructura como un backend (motor) y para los interfaces de usuario, frontent, tenemos a TeXstudio y Lyx; todos estos productos cuentan con las libertades de uso y de distribución. Las formulas matemáticas dentro de los cuadernos interactivos serán codificadas en este lenguaje, LaTeX.

Dentro del contexto de la investigación serían apropiados los siguientes productos, que son proyectos de software libre.

Maxima (WxMax, 2020) es un motor de cálculo simbólico escrito en lenguaje Lisp publicado bajo licencia GPL Cuenta con un amplio conjunto de funciones para hacer manipulación simbólica de polinomios, matrices, funciones racionales, integración, derivación, manejo de gráficos en 2D y 3D, manejo de números de coma flotante muy grandes, expansión en series de potencias y de Fourier, entre otras funcionalidades. Maxima está basado en el sistema original de Macsyma desarrollado por MIT en los años 70. Es bastante fiable, tiene un buen recolector de basura, por lo que no desperdicia memoria. Un interface de usuario muy difundido es WxMaxima. No implementa el concepto de notebooks.

Sagemath (Sage, 2020) conocido anteriormente como Sage, es un sistema algebraico computacional (CAS) que destaca por estar construido sobre paquetes matemáticos ya contrastados como NumPy, Sympy, PARI/GP o Máxima y por acceder a sus potencias combinadas a través de un lenguaje común basado en Python. La interacción con el usuario es posible desde la interfaz de línea de comandos (basada en IPython) o vía unos cuadernos web que combinan celdas de código con celdas con gráficos, texto enriquecido o fórmulas renderizadas con LaTeX.

Observamos que Sagemath es un superconjunto de motores de CAS y bibliotecas matemáticas que son accesibles a través del lenguaje Pyhton y con un interface de usuario IPython que actualmente a sido remplazado por Jupyter. Para cubrir las necesidades de la investigación convendría poseer un subconjunto reducido en lo que respecta a los módulos.

El beneficio básico de la elección del software libre sería que cuente con un soporte del continuo desarrollo por los responsables del proyecto y también el uso de los usuarios finales, quienes son los que le dan la adaptación y aplicabilidad a diversos campos de interés, por lo que dicho software deberá contar con la posibilidad de incluir módulos que deben ser escritos en lenguajes de programación amigables e universales. Sin duda alguna, Python se ajusta a dichas necesidades.

2.2.5 El lenguaje de programación Python

En este proyecto de investigación se utilizó el lenguaje de programación "Python 3.7" (PSF, 2017) para escribir el código de las celdas de ejecución de los cuadernos interactivos.

Para Challenger et al. (2014), la programación es un arte, y por tanto necesita de un lenguaje que permita expresar las ideas. Python es el lienzo que permite reflejar, de forma simple y elegante, las ideas en forma algorítmica. Sus aplicaciones, tanto en la comunidad docente como en la científica, le permitirán aumentar su popularidad y adopción a nivel internacional.

Challenger et al. (2014), sostiene que una de las aplicaciones para la que fue concebido Python en sus principios fue como un lenguaje fácil de aprender. Su creador ha expresado que llegará el día donde la programación se convierta en una asignatura tan importante como las matemáticas y la física para los currículos de la enseñanza media. Universidades como la prestigiosa MIT (Massachusets Institute of Technology) lo han seleccionado para impartir cursos como Introducción a las Ciencias de la Computación y a la Programación e Introducción a los Algoritmos.

En esta investigación se ha utilizado Python con otros módulos, como el módulo sympy, symbolic python, que es una biblioteca de funciones en lenguaje Python para matemática simbólicas, cuyo propósito es llegar a ser un sistema de álgebra por computadora (CAS) completo manteniendo el código tan simple como sea posible para poder ser legible y extensible de manera fácil. Así mismo se disponen de otros módulos como numpy (Python Numérico) y scipy (Python Científico) que son pilares para el trabajo científico hoy en día. Actualmente se puede observar una gran tendencia al uso de Python en grandes centros de investigación como el CERN (Organización Europea para la Investigación Nuclear) y por parte de científicos en ramas como la Bioinformática, Neurofisiología, Física, Matemáticas, etc. Esto es debido a la disponibilidad de bibliotecas de visualización, procesamiento de señales, estadísticas, álgebra, etc.; de fácil utilización y que cuentan con muy buena documentación.

Python también está presente en la industria ya que Google lo ha utilizado para construir sus algoritmos de búsqueda para la web.

En la asignatura de métodos numéricos de la EP de Ingeniería Civil de la Universidad Andian del Cusco, se utiliza Python con el módulo numpy para implementar los algoritmos de los métodos numéricos que se estudian en dicha asignatura, lo que trajo como consecuencia una alternativa al productos comercial MatLab.

Por tanto, se debería adoptar esta metodología de trabajo desde los cursos básicos de matemática dentro de esta EP y por supuesto en las otras ingenierías, como un lenguaje para realizar los cálculos algebraicos al principio y luego los científicos en asignaturas de especialidad.

2.2.6 Cuadernos interactivos y los TIC en la Educación Superior

Lorandi et al. (2017), en su trabajo "Llevando Python a las aulas", sostienen que: Las Jupyter Notebooks son una prometedora herramienta para mejorar la enseñanza en las ingenierías, el poder combinar en un documento código de computadora (Python) con elementos de texto enriquecido (párrafos, ecuaciones, figuras, enlaces, etc.), que además permita que estos documentos sean lo suficientemente legibles y puedan contener una descripción del análisis y los resultados (figuras, tablas, etc.), combinados con partes ejecutables, ofrecen un enorme potencial para la docencia. El poder además en una arquitectura cliente-servidor crear, editar o modificar documentos propios de la matemática y de la ingeniería, desde un servidor remoto a través de Internet, ofrece enormes posibilidades para el aprendizaje autónomo.

Aznar et al. (2016), en su trabajo "Ipython Notebook: Herramienta para integración de teoría y práctica en Ingeniería y Arquitectura", resumen: Las crecientes posibilidades que ofrecen las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones favorecen los sistemas de aprendizaje interactivos que están cada vez más presentes en la docencia. Un aspecto esencial del aprendizaje en los estudios de Ingeniería y Arquitectura es la presencia del ciclo: "formular la hipótesis, probar la hipótesis, evaluar los datos, formular la conclusión a partir de los datos y repetir modificando hasta obtener conclusiones coherentes". La herramienta objeto de estudio en esta comunicación facilita la implementación de este ciclo como metodología para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Ipython Notebook (reemplazado después por Jupyter Notebook) facilita el desarrollo integrado de manuales interactivos que permiten formular distintos modelos matemáticos, simularlos, verificarlos y realizar pruebas sobre ellos.

Los cuadernos interactivos, notebooks, es la interface del usuario final que mejor se adapta a las tendencias modernas tanto para presentar información como para poder desarrollar y mostrar resultados.

Si bien los TIC en la educación superior implican en su máxima expresión el uso de los diversos sistemas e-learning, hay un segmento que se ha descuidado, sobre todo en el área de la matemática de la formación básica en ingeniería. La adopción de al menos un lenguaje de programación para la modelación de ejercicios matemáticos y por qué no hasta el manejo de verdaderos problemas de la ingeniería, debería ser la necesidad de las nuevas currículas de formación dentro de las escuelas de ingeniería.

Las adopciones de proyectos de software libre a largo plazo generarían productos propios que posicionarían a la universidad dentro del contexto científico. Al principio claro está, tendría un costo extra en cursos de capacitación y sobre todo en la adopción de la nueva filosofía de trabajo.

El universo del software libre es fascinante, es así que construiremos una versión equivalente, minimalista de Sagemath. Para esto utilizaremos la versión Zero, básica, de la distribución Winpython (WinP, 2019), descargable, al cual le añadiremos los módulos para el cálculo simbólico, Sympy, para el trazado gráfico, MatplotLib y la interface web, Jupyter. Adicionalmente para un cálculo numérico, científico y estadístico se pueden añadir los módulos: Numpy, Scipy, Pandas.

Una vez instalado el Winpython Zero, lanzamos el intérprete *Winpython Command Prompt,* dentro del cual ejecutamos:

```
python -m pip install --upgrade pip

pip install sympy matplotlib numpy scipy pandas

pip install jupyter
```

La primera línea de comando actualiza el administrador de paquetes de la distribución de python instalada. Las siguientes líneas de instrucción instalan los módulos adicionales para tener el entorno de trabajo suficiente para realizar cálculos simbólicos y científicos dentro de los notebooks de jupyter.

2.2.6.1 Cuadernos interactivos Jupyter Python Notebook

Son páginas web vinculadas que contienen bloques de texto y bloques de código.

Un bloque de texto soporta el estándar actual de páginas web más la posibilidad de incluir texto científico codificado en LaTeX. La maquetación de la información se hace con el lenguaje Markdown.

Un bloque de código es el espacio interactivo donde se modelan y realizan los ejercicios matemáticos utilizando el lenguaje de programación Python. Los cómputos se hacen en forma simbólica como también en forma numérica.

La aplicación web que despliega dichos contenidos se denomina Jupyter y puede ser ejecutada tanto en ordenadores personales como en la nube (https://jupyter.org).

En este proyecto de investigación estos cuadernos interactivos serán proporcionados como material educativo para poder ilustrar los contenidos del Cálculo Diferencial y sobre todo para ser una fuente de experimentación individual para los estudiantes, ya que con ellos podrán continuar desarrollando ejercicios propuestos, así como contenido adicional.

Un valor atractivo que posee esta tecnología es que es de carácter: de libre uso y de libre distribución, y actualmente son utilizados en el ámbito académico y científico para formular y comunicar resultados de investigaciones tanto en las ciencias básicas como en las aplicadas.

2.2.7 Aprendizaje del Cálculo diferencial

2.2.7.1 Aprendizaje de las Matemáticas

El estudiante ocupa el centro de la acción educativa, así todos los esfuerzos que se propongan deben orientarse a la mejora de resultados de aprendizajes de toda la comunidad estudiantil en general y en particular de la escuela profesional de Ingeniería Civil.

Irazoqui (2014) sostiene, la necesidad de crear una visión del aprendizaje de modo que se permita la inclusión del mayor número posible de estudiantes. Si se parte del supuesto que los estudiantes poseen capacidades de aprender y sus profesores son capaces de generar actividades que propicien su aprendizaje, entonces la tarea educativa será más fácil y placentera y, sin duda, con mejores resultados que los que hasta ahora se tienen. Para lograr ello es fundamental usar una gran variedad de estrategias de enseñanza y aprendizaje tal que se acople a los distintos estilos de aprendizaje de los estudiantes. “Los Estilos de Aprendizaje son los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos, que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los discentes perciben, interaccionan y responden a sus ambientes de aprendizaje” (Keefe, como se citó en Gallego and Nevot, 2008).

Estilos de aprendizaje

Honey y Mumford (citado en Gallego and Nevot, 2008) prescinden parcialmente de la insistencia en el factor inteligencia, que no es fácilmente modificable, insistiendo en otras facetas más accesibles y mejorables. Clasifican los Estilos de Aprendizaje en cuatro tipos: Activo, Reflexivo, Teórico y Pragmático. Y los describen así:

> Las personas que tienen predominancia del estilo activo se implican plenamente y sin prejuicios en nuevas experiencias. Son de mente abierta, nada escépticos y acometen con entusiasmo las tareas nuevas. Sus días están llenos de actividad. Se

crecen ante los desafíos de nuevas experiencias, y se aburren con los largos plazos. Piensan que por lo menos una vez hay que intentarlo todo. Son personas muy de grupo que se involucran en los asuntos de los demás y centran a su alrededor todas las actividades.

A los reflexivos les gusta considerar experiencias y observarlas desde diferentes perspectivas. Reúnen datos, analizándolos con detenimiento antes de llegar a alguna conclusión. Su filosofía consiste en ser prudente. Disfrutan observando la actuación de los demás, escuchan a los demás y no intervienen hasta que se han adueñado de la situación. Crean a su alrededor un aire ligeramente distante y condescendiente.

Los teóricos enfocan los problemas de forma vertical escalonada, por etapas lógicas. Tienden a ser perfeccionistas. Integran los hechos en teoría coherentes. Son profundos en su sistema de pensamiento, a la hora de establecer teorías, principios y modelos. Les gusta analizar y sintetizar. Buscan la racionalidad y la objetividad huyendo de los subjetivo y de lo ambiguo. Para ellos si es lógico es bueno.

El punto fuerte de las personas con predominancia en estilo pragmático es la aplicación práctica de las ideas. Descubren el aspecto positivo de las nuevas ideas y aprovechan la primera oportunidad para experimentarlas. Les gusta actuar rápidamente y con seguridad con aquellas ideas y proyectos que les atraen. Tienden a ser impacientes cuando hay personas que teorizan. Pisan la tierra cuando hay que tomar una decisión o resolver un problema. Su filosofía es siempre se puede hacer mejor, si funciona es bueno.

Nevot (2001) en su obra, “Estilos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas”, expone los estilos de aprendizaje con su caracterización y propuestas didácticas. Se revisa entonces dichos estilos de aprendizaje, considerando en cada uno de ellos sus preferencias y dificultades, asimismo las sugerencias didácticas para cada uno de ellos.

Estilo de aprendizaje Activo

Los estudiantes con este estilo tienen las siguientes preferencias y dificultades:

Tabla 1

Estilo activo: preferencias y dificultades

Preferencias	Dificultades
• Intentar cosas nuevas. • Resolver problemas. • Competir en equipo. • Dirigir debates. • Hacer presentaciones. • No tener que escuchar sentado mucho tiempo. • Realizar actividades diversas.	• Exponer temas con mucha carga teórica. • Prestar atención a los detalles. • Trabajar en solitario. • Repetir la misma actividad. • Limitarse a cumplir instrucciones precisas. • Estar pasivo: oír conferencias, explicaciones. • No poder participar.

Nota. Fuente: Etilos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Nevot, A. (2001)

Impiden el desarrollo del estilo activo el miedo al fracaso, la equivocación, la manifestación de ansiedad, obligación a realizar tareas no deseadas y desconfianza de capacidades individuales.

Se sugiere solución de problemas en trabajo grupal y el cambio de actividad durante la clase, fomentar la autoconfianza y el diálogo.

Estilo de aprendizaje Reflexivo

Los estudiantes con este estilo tienen las siguientes preferencias y dificultades:

Tabla 2

Estilo reflexivo: preferencias y dificultades

Preferencias	Dificultades
• Observar y reflexionar. • Llevar su propio ritmo de trabajo. • Tener tiempo para asimilar, escuchar, preparar. • Trabajar concienzudamente. • Oír los puntos de vista de Estar presionado de tiempo. otros. • Hacer análisis detallados y pormenorizados.	• Ocupar el primer plano. • Actuar de líder. • Presidir reuniones o debates. • Participar en reuniones sin planificación. • Expresar ideas espontáneamente. • Estar presionado de tiempo. • Verse obligado a cambiar rápidamente de una actividad a otra.

Nota. Fuente: Etilos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Nevot, A. (2001)

Impiden el desarrollo de este estilo la falta de tiempo en la planificación, el cambio rápido de actividad, la impaciencia, los trabajos impulsivos.

Se sugiere elaborar protocolos que estructuren la solución de un problema, pasos para la construcción de una demostración o el desarrollo de un ejercicio tipo. Mantener el interés por la materia al conectar los nuevos conocimientos con los anteriores, usando adecuadamente ilustraciones y ejemplos. Propiciar la reflexión después de la práctica, el docente alienta que los estudiantes se escuchen mutuamente y entiendan lo que sus compañeros dicen. El docente interpreta las reflexiones, destaca las ideas importantes, resaltando lo más importante de un tópico determinado. El docente fortalece la producción autónoma de los grupos y guiará de forma paulatina hacia los conocimientos que sean esenciales.

Estilo de aprendizaje Teórico

Los estudiantes con este estilo tienen las siguientes preferencias y dificultades:

Tabla 3

Estilo teórico: preferencias y dificultades

Preferencias	Dificultades
• Sentirse en situaciones claras y estructuradas. • Participar en sesiones de preguntas y respuestas. • Entender conocimientos complicados. • Leer u oír hablar sobre ideas y conceptos bien presentados. • Leer u oír hablar sobre ideas y conceptos que insistan en la racionalidad y la lógica. • Tener que analizar una situación completa.	• Verse obligado a hacer algo sin un contexto o finalidad clara. • Tener que participar en situaciones donde predominen las emociones y los sentimientos. • Participar en actividades no estructuradas. • Participar en problemas abiertos. • Verse, por la improvisación, ante la confusión de métodos o técnicas alternativas.

Nota. Fuente: Etilos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Nevot, A. (2001)

Impiden el desarrollo de este estilo la intuición y la subjetividad. La dependencia del profesor y los compañeros de estudio. Dificultad para pasar del pensamiento a la acción, del camino a la meta.

Se sugiere leer pausada y atentamente tópicos como un axioma, teorema, proposición, propiedad o el simple enunciado de un problema. A continuación sintetizar lo leído con sus propias palabras. Continuar en el modelamiento algebraico, asignando a las fórmulas un sentido, explicándolas y justificando el lenguaje usado. De esta manera los símbolos usados cobran significado para el estudiante. El docente propone actividades que se apliquen a los conceptos adquiridos de forma práctica o teórica. El aprendizaje memorístico en fórmulas y reglas forman parte del conocimiento matemático y no deben dejarse de lado.

Estilo de aprendizaje Pragmático

Los estudiantes con este estilo tienen las siguientes preferencias y dificultades:

Tabla 4

Estilo pragmático: preferencias y dificultades

Preferencias	Dificultades
• Aprender técnicas inmediatamente aplicables. • Percibir muchos ejemplos y anécdotas. • Experimentar y practicar técnicas con asesoramiento de un experto. • Recibir indicaciones prácticas y técnicas. completa.	• Aprender cosas que no tengan una Aplicabilidad inmediata. • Trabajar sin instrucciones claras sobre cómo hacerlo. • Considerar que las personas no avanzan con suficiente rapidez.

Nota. Fuente: Etilos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Nevot, A. (2001)

Impiden el desarrollo de este estilo la distracción y la falta de concentración, así como dejar los temas abiertos. En la etapa inicial de un problema antes de los planteamientos lógicos, usa la libre imaginación y las conjeturas.

Se sugiere realizar la corrección de los ejercicios con su posterior autoevaluación. Proporcionar medios para experimentar y observar, la experimentación es una técnica eficaz para el descubrimiento y la solución de problemas. Proponer ejercicios, problemas que hagan uso de técnicas, algoritmos y artificios matemáticos en diversos contextos de los que se han aprendido y enseñado. Hacer uso de representaciones gráficas para plantear los problemas o ejercicios ya que generalmente proporcionan mejor apoyo que las palabras, números, símbolos o fórmulas.

Nevot (2001), cierra este análisis indicando, a quienes realizan la tarea docente que, esta es una actividad viva y en constante cambio, por tanto, se ha de estar pendiente de las aportaciones que señalan los reportes de investigación, así como a las sugerencias que otros docentes puedan contribuir a los temas objeto de enseñanza aprendizaje.

Como indica Irazoqui (2014), la actitud en el aula resulta ser un claro espejo de la actitud del maestro frente a la vida. Recordando que la enseñanza es un arte y el aprendizaje es fruto del mismo, quién lo tome de otra manera tiene pocas posibilidades de sobrevivir en esta difícil empresa que es educar hoy. Lo difícil, sin duda alguna, es combinar todas estas sugerencias didácticas en el aula, donde se tendrá estudiantes con distintos estilos de aprendizaje. Es esta una tarea titánica, que al maestro sobrepasa sin duda, pero al menos lo intenta. A esto apunta al hacer de la educación un arte y una misión al inicio de cada jornada.

Se debe reconocer el hecho que las condiciones actuales de los estudiantes que hoy se incorporan a las aulas universitarias ingresan mal preparados en cuanto a contenidos matemáticos y conductas académicas. La situación actual, de mayor cobertura de acceso a las universidades, dada la gran oferta de instituciones, ha cambiado notoriamente el escenario educativo. Hay mayor acceso, pero se aprecia menor calidad del estudiantado, así, si antes bastaba la clase magistral, la práctica unida a una tutoría semanal, hoy eso difícilmente da resultado.

Por tanto se distinguen dos tipos muy diferentes de estudiantes, como lo relata Biggs (2010), en su obra Calidad del aprendizaje universitario: por un lado, está la estudiante que denomina Susan, con sus características como: alumna comprometida, le interesan sus estudios y se esfuerza por hacerlo bien; en cambio, por el otro lado, está Robert, a quien atribuye cualidades como las siguientes: sólo quiere conseguir un título que le permita conseguir un puesto de trabajo el día de mañana, no tiene mayor interés en las materias, asiste a clases con casi ninguna pregunta y se esfuerza lo justo solo para aprobar sus asignaturas.

Ante este escenario, el cual está presente en la mayoría de las universidades, este autor (Biggs, 2010), insta a que Robert se acerque a Susan, sólo de esta manera la institución estará cumpliendo el cometido a la que ha sido llamada y que ha explicitado en su misión y visón que la define, hacer y construir un profesional competente y que pueda adaptarse al cambio de la sociedad del conocimiento de hoy.

Lo cierto es que las aulas universitarias están repletas de estudiantes como Robert y hay muy pocas Susan en ellas. La pregunta natural es entonces: ¿cómo hacer para que los estudiantes como Robert se transformen en Susan en el sentido académico?

Biggs (2010), adelanta una solución para producir una mejor enseñanza, cree necesario que las instituciones inviertan en una mejor capacitación en su colectivo docente, pues son los profesores quienes experimentan los problemas y, con ayuda tendrán que generar las soluciones. También dejar claro que la infraestructura para la conectividad, recursos computacionales y servidores de información que proporcionen recursos dentro del aula y del Campus universitario no deben dejarse de lado.

2.2.8 El cálculo diferencial

2.2.8.1 Antecedentes históricos

Podemos encontrar los primeros rastros de los conceptos del Cálculo diferencial en los libros de Apolonio de Pérgamo (262-190 A. C.) cuyos estudios fueron relativos a las tangentes de una cónica y los estudio sobre máximos y mínimos.

Isaac Newton (1643 – 1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), desarrollaron independientemente avances importantes sobre el cálculo diferencial. El nombre de Cálculo Diferencial se debe a Leibniz.

Un elemento necesario para el desarrollo del Cálculo diferencial es el concepto de función, para Newton era el resultado del movimiento de una partícula conforme transcurría el tiempo, mientras que para Leibniz una curva, siendo el resultado de segmentos de rectas infinitesimales unidos entre sí, esto es, una curva es una poligonal cuyo número de lados es suficientemente grande.

Uno de los conceptos fundamentales para el Cálculo diferencial es el "Límite de una función", Bolzano (1817) y Cauchy (1821) dieron las primeras bases y posteriormente Weierstrass (1850-1860) formalizo rigurosamente la definición. Otros matemáticos como Cantor, Hilbert, Fourier, Gauss, Lebesgue y Riemann posteriormente contribuyeron al desarrollo del Cálculo diferencial.

2.2.8.2 Dificultades del aprendizaje del Cálculo

Diversas universidades de todo el mundo proponen prerequisitos como aprobar exámenes o cursos propedeuticos de modo que dejen en mejores condiciones a los estudiantes para afrontar con mayor éxito la línea de los cursos de Cálculo. Es decir, se observa lo importante que resultan los conocimientos previos para poder rendir con relativo éxito en los cursos de Cálculo. Y, si los estudiantes no poseen dichos conocimientos, difícilmente sortearán con éxito las exigencias que esta rama de la Matemática impone.

En la mayoría de las universidades peruanas como en la nuestra, las currículas de estudio presentan cursos básico previos como son: Matemática I y II o Pre Cálculo, los cuales sientan fuertemente las bases, con el estudio de tópicos del álgebra y sobre todo el estudio de las funciones reales de variable real.

La primera dificultad con que se encuentra un estudiante de Cálculo es el desconocimiento evidenciado en la manipulación de las funciones, la operatoria algebraica, la solución de ecuaciones e inecuaciones, las fracciones parciales y sobre todo el deficiente uso del valor absoluto. Este déficit de conocimiento agravará el aprendizaje del Cálculo diferencial. Es decir tanto docentes como dicentes son los responsables en las etapas previas al Cálculo.

Ahora bien, hay consenso también en señalar que por lo general la enseñanza del Cálculo se centra en demasía en su parte algorítmica, al manejo de reglas, sin lograr asimilar de forma profunda los conceptos del Cálculo, así como lograr resolver las aplicaciones inmediatas, como son los problemas de máximos y mínimos para una función y los problemas de optimización.

Por otro lado, a veces se comete el error de presentar esta materia en forma muy rigorosa, más cercana al análisis matemático y, como consecuencia de ello la aplicación práctica de los conceptos y la solución de aplicaciones se ve dificultada.

Otro aspecto que pocas veces se toma en consideración es la falta de compromiso por parte de docente al impartir su asignatura, por lo general se culpa a los estudiantes de su mal desempeño, pero ¿y al docente qué papel le cabe en todo el proceso educativo? ¿Se hace responsable de sus estudiantes? ¿O simplemente se limita a afirmar que los estudiantes son sencillamente malos y no estudian?

Sin embargo, hoy se observa que se tienen a disposición de una manera mas accesible recursos tecnológicos y no se debe olvidar que los estudiantes son nativos en dicha materia. En el presente semestre las sumillas de los cursos de matemática en nuestra universidad incluyen un ítem que señala el uso de software matemático para el desarrollo de la asignatura.

En este trabajo de investigación proponemos el uso de un software matemático libre con características precisas para el desarrollo de los contenidos de Cálculo diferencial y como base para el desarrollo de habilidades para cursos posteriores del Cálculo, la matemática aplicada y la computación técnica.

2.2.8.3 Definición conceptual del Aprendizaje del Cálculo Diferencial

Quishpe (2021) afirma que el aprendizaje basado en competencias consiste en potenciar y desarrollar habilidades necesarias y específicas con la finalidad de facilitar los conocimientos técnicos y científicos, se lo puede aplicar en cualquier contexto educativo. Por tanto, nuestro propósito es potenciar y desarrollar las competencias matemáticas, al respecto Mosquera (2017) sostiene que:

> Para el caso particular de las matemáticas, ser competente está relacionado con ser capaz capaz de realizar tareas matemáticas, además de comprender y argumentar por qué pueden ser utilizadas algunas nociones y procesos para resolverlas. Esto es, utilizar el saber matemático para resolver problemas, adaptarlo a situaciones nuevas, establecer relaciones o aprender nuevos conceptos matemáticos. Así, la competencia matemática se vincula al desarrollo de diferentes aspectos, presentes en toda la actividad matemática de manera integrada.

Dichos aspectos, según afirma Mosquera (2017) son: La comprensión conceptual de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas. La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. El modelamiento, entendida como la forma interrelacionar el mundo real con las matemáticas, construyendo modelos matemáticos siendo esto un elemento fundamental para resolver problemas. La comunicación, entendida como el manejo del lenguaje propio de las matemáticas, deducir argumentos lógicos. El razonamiento, como justificar procedimientos, formula hipótesis, encontrar contraejemplos, hacer conjeturas.

Por lo tanto, el aprendizaje del Cálculo Diferencial se construye sobre el desarrollo de las competencias matemáticas propias del Cálculo diferencial, enfatizando los aspectos de la comprensión conceptual, la ejercicitación de procedimientos y el modelamiento de situaciones problemáticas propias de la Ingeniería.

2.2.8.4 Definición operacional del Aprendizaje del Cálculo Diferencial

Se observará el aprendizaje del Cálculo Diferencial cuando el estudiante:

1. Sea capaz de resolver de ejercicios del Cálculo Diferencial: Es decir manejar los algorítmos y procesos de las matemáticas básicas en el nuevo campo del Cálculo diferencial, el cual proporciona nuevas técnicas y métodos par la obtención de límites, calcular derivadas, determinar las condiciones de continuidad, así como aplicar los criterios de primera y segunda derivada.

2. Maneje conceptos del Cálculo Diferencial: Es decir la comprensión conceptual de las definiciones, teoremas y propiedades así como las interpretaciones en las diferentes áreas de la ciencia aplicada. La comprensión y manejo de lo infinitesimal en los límites de funciones es el punto de partida, sigue la razón de cambio con la derivada, para asimilar y explicar significados geométricos o físicos como la recta tangente, la velocidad y aceleración. El comportamiento de las funciones pueden

ser conceptualizados con la evolución creciente o decreciente de la derivada cuyos valores singulares identifican a valores extremos de las funciones.

3. Capacidad de modelar problemas del Cálculo Diferencial: Es decir construye modelos matemáticos que reflejen las condiciones propuestas, dando solución a problemas. Dentro de este contexto tenemos el Modelamiento de problemas de límites, problemas de razón de cambio instantáneo, problemas de optimización de funciones y problemas de incrementos.

2.3 Hipótesis

2.3.1 Hipótesis General

El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, influyen significativamente en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

2.3.2 Hipótesis Específicas

1. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente la capacidad de resolución de ejercicios del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

2. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente el manejo de conceptos del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

3. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente la capacidad de Modelar problemas del Cálculo diferencial en

los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

2.4 Variables

2.4.1 Identificación de variables

Variable independiente: Uso de Cuadernos interactivos Jupyter python notebook, es la variable que se manipula.

Los Jupyter python notebook son páginas web vinculadas que contienen bloques de texto y bloques de código. Las bloques de texto se implementan con el lenguaje Markdown y las fórmulas matemáticas con el lenguaje Latex. Los bloques de código es el espacio dinámico donde se modelan y realizan los ejercicios matemáticos utilizando el lenguaje de programación Python, cuyos cómputos se hacen en forma simbólica y también en forma numérica. La aplicación que despliega toda esta tecnología es de libre uso y de libre distribución y se denomina Jupyter, el cual se ejecuta sobre el entorno del lenguaje Python.

Los Cuadernos interactivos Jupyter python notebook son documentos electrónicos vinculados que contienen la parte teórica y práctica del Cálculo diferencial. Estos documentos son utilizados sobre todo para la parte aplicativa, ya que en ellos se modela, ejecuta y verifica la parte aplicativa del contenido del Cálculo diferencial, usando el lenguaje Python con la biblioteca de cálculo simbólico Sympy. La parte teórica, teoremas y propiedades también pueden ser verificadas dentro de estos documentos. Se incluyen lecciones preliminares para el manejo del lenguaje Python, para la escritura con Markdown y el manejo del cálculo simbólico Sympy. El grupo experimental desarrolla los contenidos del Cálculo diferencial usando este material digital.

Variable dependiente: Aprendizaje del Cálculo Diferencial, es la variable que se mide.

2.4.2 Operacionalización de variables

VARIABLE DEPENDIENTE	CONCEPTO	DIMENSIONES	INDICADORES
Aprendizaje del Cálculo Diferencial	Es la apropiación de las ideas, conceptos y procedimientos relacionados con los infinitésimos y los procesos infinitos en la búsqueda de: tangentes a las curvas, determinación de máximos y mínimos para una función, la resolución de problemas de optimización, de interpolación o de aproximación. (Bouvier y George, 2000, citado por, Irazoqui, 2015).	Sea capaz de resolver de ejercicios del Cálculo diferencial: Es decir manejar los algoritmos y procesos de las matemáticas básicas en el nuevo campo del Cálculo diferencial, el cual proporciona nuevas técnicas y métodos par la obtención de límites, calcular derivadas, determinar las condiciones de continuidad, así como aplicar los criterios de primera y segunda derivada.	1. Obtiene el valor límite de una función, salvando los diferentes tipos de indeterminación. 2. Obtiene la derivada de funciones algebraicas, trigonométricas y de funciones trascendentes. 3. Obtiene las derivadas de orden superior y de funciones implícitas. 4. Obtiene las condiciones de la continuidad de una función.
		Maneje conceptos del Cálculo diferencial: Es decir la comprensión conceptual de las definiciones, teoremas y propiedades así como las interpretaciones en las diferentes áreas de la ciencia aplicada. La comprensión y manejo de lo infinitesimal en los límites de funciones es el punto de partida, sigue la razón de cambio con la derivada, para asimilar y explicar significados geométricos o físicos como la recta tangente, la velocidad y aceleración. El comportamiento de las funciones pueden ser conceptualizados con la evolución creciente o decreciente de la derivada cuyos valores singulares identifican a valores extremos de las funciones.	5. Maneja correctamente las aplicaciones geométricos de la derivada. 6. Maneja correctamente las aplicaciones físicas de la derivada. 7. Maneja correctamente los criterios de primera y segunda derivada.
		Capacidad de modelar problemas del Cálculo diferencial: Es decir construye modelos matemáticos que reflejen las condiciones propuestas, dando solución a problemas. Dentro de este contexto tenemos el modelamiento de problemas de límites, problemas de razón de cambio instantáneo, problemas de optimización de funciones y problemas de incrementos.	8. Resuelve problemas de de razón de cambio instantáneo. 9. Resuelve problemas de optimización de funciones. 10. Resuelve problemas sobre incrementos de una función.

Nota. Fuente: Elaboración propia

2.5 Definición de términos básicos

Aplicaciones de la derivada: Es el uso que se le da a la derivada de una función para encontrar sus valores extremos, para determinar y analizar la forma de sus gráficas, para encontrar variaciones porcentuales de forma aproximada.

Función: Una función f de un conjunto A en un conjunto B, $f: A \rightarrow B$, es una regla que asigna un elemento único $f(x) \in B$ a cada elemento $x \in A$.

Función implícita: Una función explícita esta expresada en la forma $y=f(x)$, denominada regla de correspondencia. Una función está definida en forma implícita, cuando no es posible establecer su regla de correspondencia, es decir queda expresada en la forma $F(x, y)=0$.

Cálculo diferencial: Es la parte de la matemática cuyo campo de estudio es el comportamiento dinámico de una función cuando su variable independiente experimenta cambios infinitesimales. Se apoya constantemente en el primer concepto básico del cálculo diferencial, que es, el límite de una función, para formular el resto de conceptos también necesita del Álgebra y de la Geometría analítica. La aplicación más importante es la optimización de funciones.

Continuidad de una función: Una función es continua en un intervalo si su trazado no experimenta saltos o rupturas. Es un requisito para la diferenciabilidad de una función.

Criterio de la primera derivada: Si una función f es diferenciable sobre un intervalo que contenga a un punto crítico a. Si la derivada f' cambia de negativo a positivo en a, entonces f tiene un mínimo en a. Si la derivada f' cambia de positivo a negativo en a, entonces f tiene un máximo en a. Ahora si f' no experimenta un cambio de signo, entonces el criterio falla.

Cri**terio de la segunda derivada**: Si una función f' es diferenciable sobre un intervalo de modo que $f''(a)=0$. Si la segunda derivada f'' es negativo en a, entonces f tiene un máximo en a. Si la segunda derivada f'' es positiva en a, entonces f tiene un mínimo en a. Ahora si $f''(a)=0$, entonces el criterio falla.

Derivada de una función: La derivada de una función f mide la razón a la cual cambia esta, cuando su variable independiente experimenta un cambio infinitesimal. $f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Derivada de orden superior: La derivada de una función f es f'. La derivada de f' es f", denominada la segunda derivada de f . La derivada de f'' es f''', denominada la tercera derivada de f y asi sucesivamente, a estas derivadas se las denomina derivadas de orden superior.

Función diferenciable: Una función es diferenciable en un punto si su derivada existe en dicho punto. Sera diferenciable en un intervalo si lo es en cada punto de dicho intervalo. La diferenciabilidad implica a la continuidad de la función.

Límite de una función: Sea $f(x)$ definida en un intervalo alrededor de a, excepto, posiblemente en el mismo punto a. Si $f(x)$ se acerca tanto como queramos a L para toda x los suficintemente cerca de a, decimos que f se aproxima al límite L cuando x se acerca a a, y escribimos $\lim_{x \to a} f(x)=L$.

Máximo, mínimo de una función: Un función f presenta un máximo en un intervalo D en el punto a si el valor de la función en este es mayor o igual al resto, es decir, $f(a) \geq f(x), \forall x \in D$. De forma equivalente f tiene un mínimo en D en un punto a si $f(a) \leq f(x), \forall x \in D$.

Punto de inflexión de una función: Es aquel punto $a \in D_f$ donde $f''(a)=0$. Geométricamente hablando existe un cambio de concavidad en dicho punto de la gráfica de f.

Optimización de funciones: Es el proceso matemático que consiste en encontrar el valor óptimo (el mejor) que mínimice o máximice a una función. Es decir, usando el criterio de la primera o segunda derivada encontrar el mínimo o máximo de una función respectivamente. Este proceso es posible ya que la función está sujeta a restricciones, es decir se cuentan con recursos limitados.

Punto crítico: Es aquel punto $a \in D_f$ donde $f'(a)=0 \vee f'(a) \nexists$. Geométricamente la recta tangente a la gráfica en *f(a)* es horizontal o vertical respectivamente.

Razón de cambio instantáneo: Si una función depende del tiempo, entonces su derivada es la razón de cambio instantáneo.

Capítulo III
MÉTODO

3.1 Alcance del Estudio

La presente investigación tiene un alcance explicativo, Hernandez (2015) propone un sentido de entendimiento de las relaciones que busca determinar los factores asociados al nivel del aprendizaje del Cálculo diferencial, esto es, se establece causalidad en el nivel de aprendizaje del Cálculo diferencial haciendo uso de los Cuadernos interactivos Jupyter Python Notebook en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II

3.2 Diseño de investigación

El diseño del presente estudio es experimental, se use el diseño cuasi experimental denominado "con Grupo control no Equivalente" (cuasi experimental prueba-posprueba y grupos intactos, uno de ellos de control). Este diseño consiste en evaluar a los dos grupos en la variable dependiente, esto es para verificar la equivalencia inicial de los grupos; luego a uno de los grupos se le aplica el tratamiento experimental y el otro sigue con las actividades clásicas, grupo control; Finalmente se evalúa a los dos grupos. Sanchez (2015) indica que cuando es imposible asignar a los sujetos aleatoriamente a los tratamientos pero se mantiene los dos grupos intactos,

Al primer grupo, grupo experimental, desarrollo el contenido del Cálculo diferencial usando los cuadernos interactivos Jupyter Python Ntoebook y el segundo, grupo control, se expusieron los temas siguiendo la enseñanza tradicional.

Este diseño se esquematiza:

Tabla 5: Diseño de la investigación

G.E.	O_1	X	O_2
G.C.	O_3		O_4

Nota. Fuente: Metodología y diseños de la investigación científica. Sanchez y Reyes (2015)

Donde:

- **G. E.** Es el grupo que recibe el tratamiento experimental
- **G. C.** Es el grupo control

- **O_1, O_3** Pre-prueba aplicada al grupo experimental y grupo control respectivamente, usada para verificar la equivalencia inicial de los grupos.
- **X** Nos representa el tratamiento experimental de la variable independiente
- **O_2, O_4** Pos-prueba aplicada al grupo experimental y grupo control, usada para analizar si el tratamiento experimental tuvo efecto sobre la variable dependiente.

3.3 Población

La población del objeto de nuestro estudio fue constituida por los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco que en el semestre 2019-II son 80 estudiantes.

3.4 Muestra

La muestra es a criterio del investigador, según Hernández (2015), muestreo por conveniencia, es to es, la muestra es no probabilístico intencional, en cuanto a los grupos tanto experimental como control ya están previamente formados por el proceso de matrícula.

Tabla 6: Composición de la muestra

	G.E.	**G.C.**
Varones	27	31
Mujeres	13	09
Total	40	40

Nota. Fuente: Elaboración propia

3.5 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

La presente investigación toma como:

Técnica: Encuesta

Instrumento: Prueba de habilidades tipo PSM, prueba de selección múltiple, con alternativas de veracidad y falsedad.

Ficha técnica del Instrumento

1. **Nombre**: Cuestionario del Cálculo Diferencial.
2. **Objetivo**: El siguiente cuestionario tiene como finalidad diagnosticar de manera individual el nivel de aprendizaje del Cálculo Diferencial.
3. **Autor**: Luis Alberto Vargas Añamaco.
4. **Duración**: 120 minutos
5. **Usuarios**: Estudiantes del III ciclo de la EP de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco.
6. **Puntuación**: 1 punto por item.
7. **Dimensiones**:
    - Capacidad de resolver ejercicios del cálculo diferencial

      items: 1, 3, 4, 8-12, 15. 17, 22, 23
    - Manejo de conceptos del cálculo diferencial

      items: 2, 5, 6, 7, 13, 14, 16, 18, 24
    - Capacidad de modelar problemas del cálculo diferencial

      items: 19-21, 25-30

3.6 Validez y confiabilidad de instrumentos

3.6.1 Validez del instrumento

El instrumento luego de ser formulado a través del proceso de operacionalización de variables fue sometido al juicio de expertos quienes determinaron el porcentaje de eficacia del cuestionario, obteniendo el resultado:

Tabla 7: Reporte de validación de expertos

Nombre del experto	Valor de validación
Dr. Guido Alvarez Jauregui	90%
Dr. Ignacio Velasquez Hacha	90%
Dr. Leoncio Zarate Gamarra	72%

Nota. Fuente: Elaboración propia

3.6.2 Confiabilidad del instrumento

Para obtener la confiabilidad del instrumento se aplico una prueba piloto a 10 estudiantes y se utilizo el coeficientes de fiabilidad de Kuder Richardson 20:

$$KR_{20} = \frac{k}{k-1}\left|1 - \frac{\sum pq}{s^2}\right|$$

donde k es el número de reactivos del instrumento, p es la proporción de aciertos para un reactivo, $q = 1 - p$ y s^2 es la varianza de las puntuaciones.

Tabla 8: Resumen del proceso

$\sum pq$	5.74
s^2	26.26
k	30

KR_{20}	0.80836

Nota. Fuente: Elaboración propia

Pota tanto tenemos una confiabilidad alta para el instrumento.

3.7 Plan de Análisis de datos

Para el análisis de datos seguiremos las fases:

1. Se usó el binomio para el análisis estadístico cuyos proyectos desarrollan software libre: R Core Team (2020) y RStudio Team (2020).
2. Se evaluó la confiabilidad y validez del instrumento de investigación.
3. Se hará el análisis descriptivo de la variable de estudio.
4. Se realizará los análisis inferenciales respecto a la hipótesis planteada.
   a. Hipótesis nula Ho: El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, no influyen significativamente en el aprendizaje del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.
   b. Hipótesis alterna Ha: El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, influyen significativamente en el aprendizaje del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.
   c. Nivel de confianza: 95%.
   d. Prueba estadística: T-student.
   e. Regla de decisión: si el p valor, es tal que: si $p<0.05$ se acepta la hipótesis Ha con una confianza del 95%, de otro modo se acepta Ho.

Capítulo IV
RESULTADOS

Con el objetivo de determinar el efecto de la utilización de los cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, en el aprendizaje del Cálculo diferencial en los estudiantes de los primeros ciclos de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco, se seleccionó una muestra de 40 estudiantes para el grupo experimental y 40 para el grupo control. Mostraremos a continuación los resultados para la presente investigación del tipo cuasi experimental.

4.1 Resultados respecto a los objetivos específicos

4.1.1 Efecto del uso de los cuadernos interactivos, Jupyter python notebook en la resolución de ejercicios del cálculo diferencial.

Tabla 9: Resumen estadístico para la resolución ejercicios antes de la aplicación.

	Grupo Control	Grupo Experimental
Recuento	40	40
Promedio	9.48	9.50
Desviación estándar	1.633	1.664
Coeficiente de variación (%)	17.23	17.52
Mínimo	6	6

Nota. Fuente: Elaboración propia

En base a la tabla 09, se describe a los estudiantes de acuerdo a la nota que obtuvieron antes de aplicar el uso de cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, en la dimensión resolución de ejercicios del cálculo diferencial y se obtuvieron los siguientes resultados, la nota promedio antes de aplicar la metodología en el grupo control fue de 9.48 puntos, y en el grupo experimental fue de 9.5, en variabilidad presentan similar desviación estándar y coeficiente de variación.

Tabla 10: Resumen estadístico para la resolución ejercicios después de la aplicación.

	Grupo Control	Grupo Experimental
Recuento	40	40
Promedio	14.00	17.85
Desviación estándar	1.783	1.545
Coeficiente de variación (%)	12.74	8.66
Mínimo	10	15

Nota. Fuente: Elaboración propia

A sí mismo la tabla 10, describe los resultados obtenidos por el grupo control que siguió la metodología clásica y el grupo experimental que aplicó el uso de cuadernos interactivos Jupyter python notebook, en la dimensión resolución de ejercicios del cálculo diferencial. Respectivamente dichos grupos obtuvieron los promedios de 14.00 y 17.85.

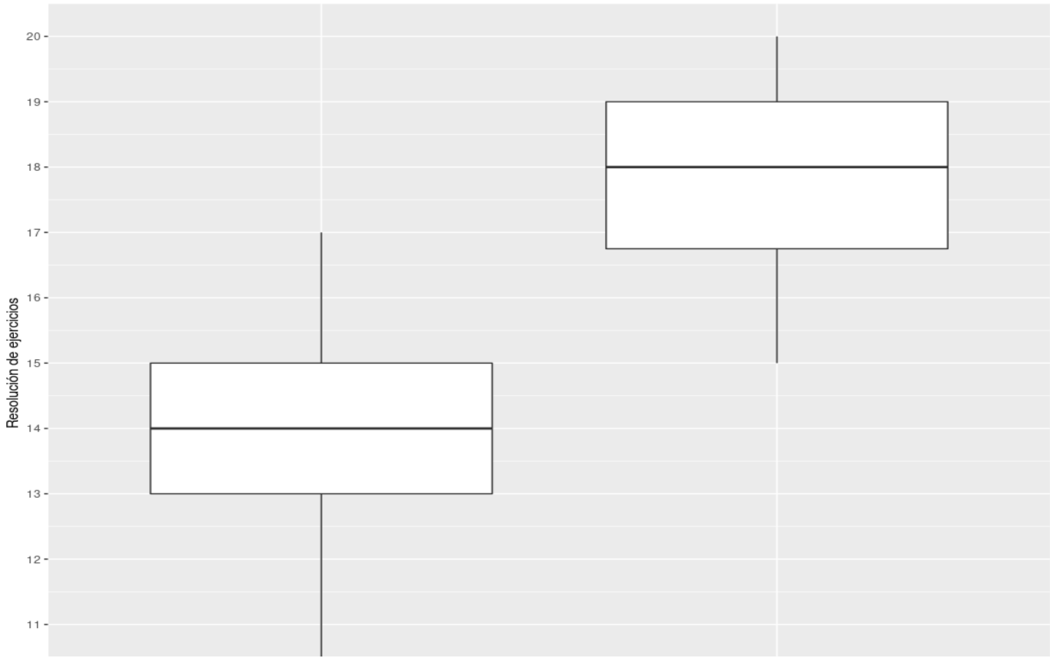
Comparación de medias para resolución de ejercicios

Se realizó la prueba de normalidad de shapiro-francia obteniéndose pvalores de 0.095 y 0.051 respectivamente para la dimensión resolución de ejercicios de los grupos control y experimental, lo cual nos permite suponer normalidad por tanto interpretar los intervalos de confianza y realizar nuestras pruebas de hipótesis.

Se encontró intervalos de confianza del 95% para la media de la dimensión resolución de ejercicios:

El grupo control mostró una media de $14.0 \pm 0.570268 = [13.43 , 14.57]$, mientras que para el grupo experimental fue de $17.85 \pm 0.494132 = [17.36 , 18.34]$; observándose que hubo una mejora del $\frac{17.85 - 14.0}{14.0} \times 100\% = 27.5\%$ del grupo experimental donde se aplicó cuadernos de Jupyter python notebook respecto del grupo control donde se trabajó de manera tradicional.

Figura 1: Dimensión I: Resolución de ejercicios



Fuente: Elaboración propia

Tabla 11: Plan de análisis de datos en la dimensión I

Hipótesis a ser probada	Hipótesis nula y alterna	Nivel de significancia	Estadística de prueba	Regla de decisión
El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente la capacidad de Resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	**Ho**: El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, no mejoran significativamente la capacidad de Resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II. **Ha**: El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente la capacidad de Resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	$\alpha = 0.05$	*t-student*	Se acepa **Ha** con una confianza del 95%, si $p\,valor < \alpha$

Nota. Fuente: Elaboración propia en base a la teoría existente.

Prueba t para comparar medias

Hipótesis nula: media 1 = media 2

Hipótesis alterna: media 1 ≠ media 2

suponiendo varianzas iguales: t = -10.3203 valor-P = 0.000

se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0.05

Como el **valor p = 0.000 < 0.05**, se rechaza la hipótesis nula y en consecuencia afirmar que existe suficiente evidencia estadística para aceptar que el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran significativamente la capacidad de resolución de ejercicios del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

4.1.2 Efecto del uso de los cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, en el manejo de conceptos del cálculo diferencial

Tabla 12: Resumen estadístico para el manejo de conceptos antes de la aplicación.

	Grupo Control	Grupo Experimental
Recuento	40	40
Promedio	10.25	11.25
Desviación estándar	1.850	2.817
Coeficiente de variación (%)	18.05	25.04
Mínimo	8	6

Nota. Fuente: Elaboración propia

En la tabla 12, se describe a los estudiantes de acuerdo a la nota que obtuvieron antes de aplicar el uso de cuadernos interactivos Jupyter python notebook, en la dimensión manejo de conceptos del cálculo diferencial se obtuvieron los siguientes resultados, la nota promedio antes de aplicar la metodología en el grupo control fue de 10.25 puntos, y en el grupo experimental fue de 11.25, en variabilidad presentan similar desviación estándar y coeficiente de variación.

Tabla 13: Resumen estadístico para el manejo de conceptos después de la aplicación.

	Grupo Control	Grupo Experimental
Recuento	40	40
Promedio	14.75	16.83
Desviación estándar	1.723	1.551
Coeficiente de variación (%)	11.67	9.22
Mínimo	12	13

Nota. Fuente: Elaboración propia

A sí mismo la tabla 13, describe los resultados obtenidos por el grupo control que siguió la metodología clásica y el grupo experimental que aplicó el uso de cuadernos interactivos Jupyter python notebook, en la dimensión manejo de conceptos del cálculo diferencial. Respectivamente dichos grupos obtuvieron los promedios de 14.75 y 16.83.

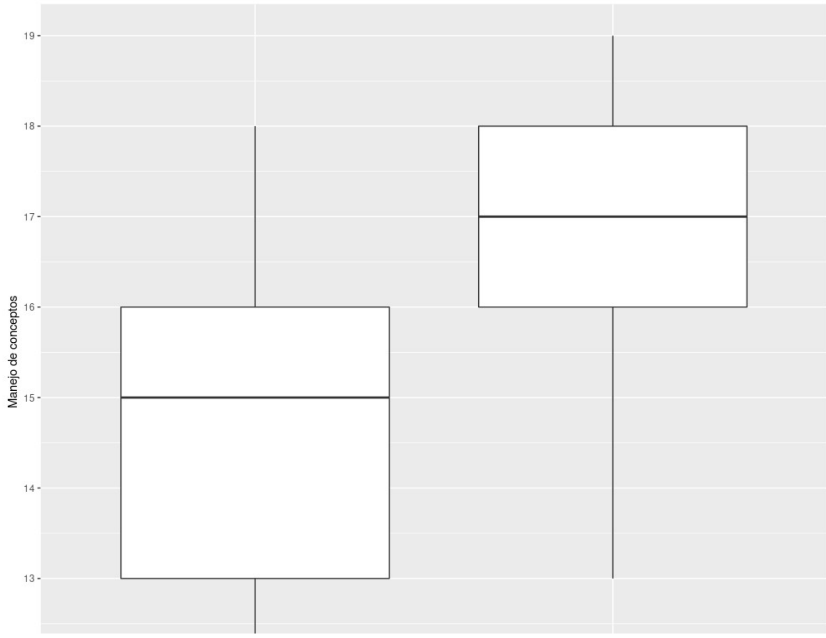
Comparación de Medias para Manejo de Conceptos

Se realizó la prueba de normalidad de shapiro-francia obteniéndose pvalores de 0.079 y 0.069 respectivamente para la dimensión manejo de conceptos de los grupos control y experimental, lo cual nos permite suponer normalidad por tanto interpretar los intervalos de confianza y realizar nuestras pruebas de hipótesis.

Se encontró intervalos de confianza del 95% para la media de la dimensión manejo de conceptos:

El grupo control mostró una media de 14.75 ± 0.550375 = [14.20 , 15,30], mientras que el grupo experimental 16.825 ± 0.49592 = [16.33 , 17.32]; observándose una mejora del $\frac{16.825-14.75}{14.75}\times 100\,\% = 14.07\,\%$ del grupo experimental donde se aplicó cuadernos de Jupyter python notebook respecto del grupo control donde se trabajó de manera tradicional.

Figura 2: Dimensión II: Manejo de conceptos



Fuente: Elaboración propia

Tabla 14: Plan de análisis de datos en la dimensión II

Hipótesis a ser probada	Hipótesis nula y alterna	Nivel de significancia	Estadística de prueba	Regla de decisión
El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente el manejo de Conceptos del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	**Ho**: El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, no mejoran significativamente el manejo de Conceptos del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II. **Ha**: El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente el manejo de Conceptos del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	$\alpha = 0.05$	*t-student*	Se acepa **Ha** con una confianza del 95%, si $p\,valor < \alpha$

Nota. Fuente: Elaboración propia en base a la teoría existente.

Prueba t para comparar medias

Hipótesis nula: media 1 = media 2

Hipótesis alterna: media 1 ≠ media 2

suponiendo varianzas iguales: t = -5.66528 valor-P = 0.000

se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0.05

Como el **valor p = 0.000 < 0.05**, se rechaza la hipótesis nula y en consecuencia afirmar que que existe suficiente evidencia estadística para aceptar que el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran significativamente el manejo de conceptos del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

4.1.3 Efecto del uso de los cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, en el modelamiento de problemas del cálculo diferencial

Tabla 15: Resumen estadístico para el modelamiento de problemas antes de la aplicación

	Grupo Control	Grupo Experimental
Recuento	40	40
Promedio	9.93	10.25
Desviación estándar	1.873	2.648
Coeficiente de variación (%)	18.87	25.84
Mínimo	7	6

Nota. Fuente: Elaboración propia

De la tabla 15, se detalla a los estudiantes de acuerdo a la nota que obtuvieron antes de aplicar el uso de cuadernos interactivos Jupyter python notebook, en la dimensión modelamiento de problemas del cálculo diferencial se obtuvieron los siguientes resultados, la nota promedio antes de aplicar la metodología en el grupo control fue de 9.93 puntos, y en el grupo experimental fue de 10.25, en variabilidad presentan coeficiente de variación menor al 30%.

Tabla 16: Resumen estadístico para el modelamiento de problemas después de la aplicación

	Grupo Control	Grupo Experimental
Recuento	40	40
Promedio	14.28	17.30
Desviación estándar	1.881	1.897
Coeficiente de variación (%)	13.18	10.97
Mínimo	11	13

Nota. Fuente: Elaboración propia

La tabla 16, describe los resultados obtenidos por el grupo control que siguió la metodología clásica y el grupo experimental que aplicó el uso de cuadernos interactivos Jupyter python notebook, en la dimensión modelamiento de problemas del cálculo diferencial. Respectivamente dichos grupos obtuvieron los promedios de 14.28 y 17.30.

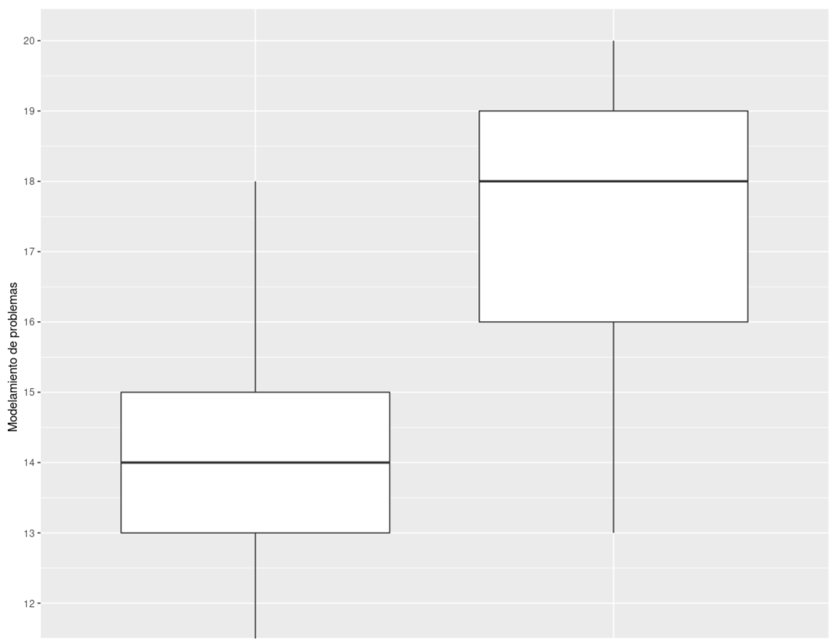
Comparación de medias para modelamiento de problemas

Se realizó la prueba de normalidad de shapiro-francia obteniéndose p_valores de 0.126 y 0.054 respectivamente para la dimensión modelamiento de problemas de los grupos control y experimental, lo cual nos permite suponer normalidad por tanto interpretar los intervalos de confianza y realizar nuestras pruebas de hipótesis.

Se encontró intervalos de confianza del 95% para la media de la dimensión modelamiento de problemas:

El grupo control mostró una media de 14.275 ± 0.601545 = [13.67 , 14.88], mientras que para el grupo experimental 17.3 ± 0.606808 = [16.69 , 17.91]; observándose una mejora del $\frac{17.3-14.275}{14.275}\times 100\% = 21.19\%$ del grupo experimental donde se aplicó cuadernos de Jupyter Python Notebook respecto del grupo control donde se trabajó de manera tradicional.

Figura 3: Dimensión III: Modelamiento de problemas



Fuente: Elaboración propia

Tabla 17: Plan de análisis de datos en la dimensión III

Hipótesis a ser probada	Hipótesis nula y alterna	Nivel de significancia	Estadística de prueba	Regla de decisión
El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente la capacidad de Modelar problemas del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	**Ho**: El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, no mejoran significativamente la capacidad de Modelar problemas del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II. **Ha**: El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente la capacidad de Modelar problemas del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	$\alpha=0.05$	*t-student*	Se acepa **Ha** con una confianza del 95%, si $p\,valor<\alpha$

Nota. Fuente: Elaboración propia en base a la teoría existente.

Prueba t para comparar medias

Hipótesis nula: media 1 = media 2

Hipótesis alterna: media 1 ≠ media 2

suponiendo varianzas iguales: t = -7.16098 valor-P = 0.000

se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0.05

Como el **valor p = 0.000 < 0.05**, se rechaza la hipótesis nula y en consecuencia afirmar que existe suficiente evidencia estadística para aceptar que el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran significativamente la capacidad de modelar problemas del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

4.2 Resultados respecto al objetivo general

Efecto del uso de los cuadernos interactivos, Jupyter python notebook en el nivel de aprendizaje del cálculo diferencial

Tabla 18: Resumen estadístico para el nivel de Aprendizaje antes de la aplicación

	Grupo Control	Grupo Experimental
Recuento	40	40
Promedio	9.53	10.0
Desviación estándar	1.617	2.276
Coeficiente de variación (%)	16.98	22.76
Mínimo	7	6

Nota. Fuente: Elaboración propia

En base a la tabla 18, se describe a los estudiantes de acuerdo a la nota que obtuvieron antes de aplicar el uso de cuadernos interactivos Jupyter python notebook, en el nivel de aprendizaje del cálculo diferencial se obtuvieron los siguientes resultados, la nota promedio antes de aplicar la metodología en el grupo control fue de 9.53 puntos, y en el grupo experimental fue de 10, en variabilidad presentan coeficiente de variación menor al 30%.

Tabla 19: Resumen estadístico para el nivel de Aprendizaje después de la aplicación

	Grupo Control	Grupo Experimental
Recuento	40	40
Promedio	14.1	17.0
Desviación estándar	1.614	1.553
Coeficiente de variación (%)	11.45	9.13
Mínimo	11	13

Nota. Fuente: Elaboración propia

Finalmente la tabla 19, muestra los resultados obtenidos por el grupo control que siguió la metodología clásica y el grupo experimental que aplicó el uso de cuadernos interactivos Jupyter python notebook, en el nivel de aprendizaje del cálculo diferencial. Respectivamente dichos grupos obtuvieron los promedios de 14.1 y 17.0.

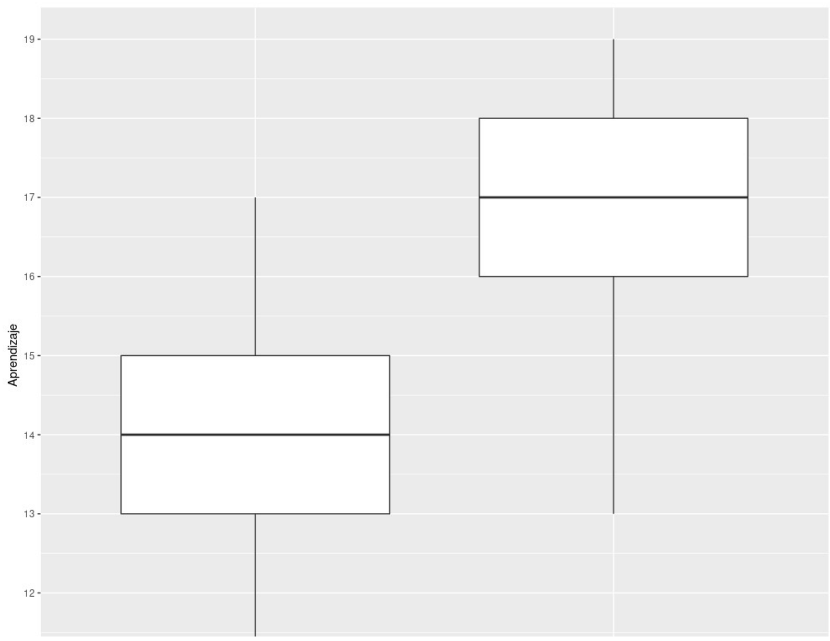
Comparación de medias para Aprendizaje

Se realizó la prueba de normalidad de shapiro-francia obteniéndose p_valores de 0.088 y 0.052 respectivamente para el nivel de aprendizaje del cálculo diferencial de los grupos control y experimental, lo cual nos permite suponer normalidad por tanto interpretar los intervalos de confianza y realizar nuestras pruebas de hipótesis.

Se encontró Intervalos de confianza del 95% para la media de la variable aprendizaje del cálculo diferencial.

El grupo control mostró una media de 14.1 ± 0.516196 = [13.58 , 14.62], mientras que para el grupo experimental 17.0 ± 0.496515 = [16.50 , 17.50]; observándose una mejora del $\frac{17-14.1}{14.1}\times 100\% = 20.57\%$ del grupo experimental donde se aplicó cuadernos de Jupyter python notebook respecto del grupo control donde se trabajó de manera tradicional.

Figura 4: Aprendizaje del Cálculo diferencial



Fuente: Elaboración propia

Tabla 20: Plan de análisis de datos del aprendizaje del Calculo diferencial

Hipótesis a ser probada	Hipótesis nula y alterna	Nivel de significancia	Estadística de prueba	Regla de decisión
El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, influyen significativamente en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	**Ho**: El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, no influyen significativamente en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II. **Ha**: El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, influyen significativamente en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	$\alpha = 0.05$	*t-student*	Se acepa **Ha** con una confianza del 95%, si $p\,valor < \alpha$

Nota. Fuente: Elaboración propia en base a la teoría existente.

Prueba t para comparar medias

Hipótesis nula: media 1 = media 2

Hipótesis alterna: media 1 ≠ media 2

suponiendo varianzas iguales: t = -8.18985 valor-P = 0.000

se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0.05

Como el **valor p = 0.000 < 0.05**, se rechaza la hipótesis nula y en consecuencia afirmar que existe suficiente evidencia estadística para aceptar que el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran significativamente el aprendizaje del Cálculo diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la escuela profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

4.3 Conclusión en base a los resultados obtenidos

A partir del análisis estadístico de los datos aplicando la prueba t-student, se puede observar que al iniciar el proceso la media del grupo de control y experimental eran iguales, ambos grupos iniciaban en iguales condiciones y posteriormente una vez terminado el proceso se observó una mejora en la media del grupo experimental llegando a establecer una diferencia significativa.

Capítulo V
DISCUSIÓN

5.1 Descripción de los hallazgos más relevantes y significativos

1. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran el aprendizaje del Cálculo diferencial de los estudiantes de Ingeniería Civil en la dimensión I, capacidad de resolución de ejercicios del Cálculo diferencial, en un 27.5%.
2. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran el aprendizaje del Cálculo diferencial de los estudiantes de Ingeniería Civil en la dimensión II, manejo de conceptos del Cálculo diferencial, en un 14.07%.
3. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran el aprendizaje del Cálculo diferencial de los estudiantes de Ingeniería Civil en la dimensión III, capacidad de modelar problemas del Cálculo diferencial, en un 21.19%.
4. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran el aprendizaje del Cálculo diferencial de los estudiantes de Ingeniería Civil en un 20.57%.

5.2 Limitaciones del estudio

Los estudiantes no presentan similares características en cuanto a las bases matemáticas que forman parte del fundamente para desenvolverse apropiadamente dentro de los temas del Cálculo diferencial.

Los estudiantes carecen de competencias básicas respecto a la programación de computadoras y el manejo de un lenguaje de programación.

La falta de horas de laboratorio disponibles para continuar asentando la práctica con los cuadernos interactivos Jupyter python notebook.

5.3 Comparación con la literatura

Barreno, Román y Olalla (2017) en su estudio “Software libre matemático y su incidencia en el aprendizaje del cálculo diferencial” concluye que la utilización del software libre matemático (Geogebra y Maxima) si incide en el rendimiento académico de los estudiantes, demostrando un mejor rendimiento académico que implica un aprendizaje significativo para el grupo experimental 30 estudiantes de la asignatura de Cálculo Diferencial logrando una media de 17.1 y el grupo control de 24 estudiante obtuvo 15.5, en nuestro estudio nuestras medias respectivas fueron 17 y 14.1. Estos resultados muy similares confirma que el manejo de las herramientas software contribuyen de forma significativa al aprendizaje del cálculo diferencial.

Serrano, Garzón, González y Cervantes (2020). en su estudio “El laboratorio computacional matemático, como complemento para promover el aprendizaje del cálculo diferencial” concluye que el laboratorio computacional matemático con software CAS utilizado como complemento de un método eficiente de enseñanza aprendizaje, en capaz de promover de alguna manera el aprendizaje significativo del Cálculo Diferencial. A través de un diseño experimental de tipo comparativo, el grupo control 38 estudiantes obtuvo una media de 14.8 (7.4 en base 10) y el grupo experimental con 50 estudiantes logro una media de 16.7 (8.37 en base 10), es decir, un rendimiento del 12.2%. Una vez más estos resultados muy similares establecen que los Jupyter Python Notebook como herramienta de apoyo al desarrollo de Cálculo diferencial da resultados semejantes a los del Sotware CAS.

Guevara (2017), “Modelo heurístico – divergente para desarrollar el aprendizaje del cálculo diferencial”, en la universidad nacional Pedro Ruiz Gallo para optar el grado de doctor, estudio de tipo de estudio aplicado, con diseño cuasi experimental, con la población de estudiantes matriculados en el Ciclo 2016-I e la Escuela Profesional de la Facultad de Ciencias Económicas y Contables de la UNPRG de Lambayeque, en la asignatura de Matemática General, que contiene el Cálculo Diferencial, logro en el grupo control de 50 estudiantes una media de 7.4 y en el grupo experimental de 50 estudiantes una media de 12.5; estos resultados pueden deberse a que los estudiantes no provienen de una escuela de ingeniería.

Mendoza (2017), "Trabajo en equipo en el aprendizaje de derivadas en estudiantes de la Universidad Nacional del Altiplano-Puno". en la universidad Nacional del Altiplano Puno para optar el grado académico de magister, estudio de tipo aplicada con diseño Cuasi experimental con Pre prueba y Pos prueba, con grupo de control aleatorio, con la población de estudiantes del segundo semestre de la Escuela profesional de Biología de la Universidad Nacional del Altiplano Puno durante el semestre académico 2015–II, logro en el grupo control de 38 estudiantes una media 12.5 y en el grupo experimental de 33 estudiantes una media de 12.6, si bien no hay diferencia significativa en ambos grupos las medias pueden estar relacionadas a que los estudiantes no proceden de una escuela de ingeniería.

Vazquez (2017) "Utilización de un entorno virtual de enseñanza y aprendizaje en el cálculo diferencial de una variable con aplicaciones a la economía" en la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann, esta Investigación se enmarca dentro del paradigma Cuantitativo y corresponde a una investigación de naturaleza explicativa, se utilizó una muestra de 50 estudiantes elegidos intencionalmente de la Cátedra Matemática I de las escuelas profesionales de Ciencias Contables y Financieras y Ciencias Administrativas. Se usó la técnica de encuesta y luego de aplicar los cuestionarios presenciales y virtuales, los desarrollos de los ejercicios y las opiniones sobre los temas de debate se arribó a la conclusión que: El uso de las tecnologías informáticas es un apoyo muy importante en el proceso de la enseñanza-aprendizaje. Aquí es importante aclarar que el investigador no uso ningún diseño experimental, tampoco una hipótesis estadística, limitando a la comparación de exámenes virtuales con presenciales.

Valverde (2018), "Los Registros de Representación Semiótica en el aprendizaje del Cálculo Diferencial, estudio de caso, en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Ambiental de la Universidad Nacional de Ingeniería", en la Universidad Nacional de Educación para optar el grado de maestro, estudio de tipo descriptivo-explicativo, con diseño Estudio de casos – Panel, con la población de estudiantes de nuevo ingreso a las especialidades de Ingeniería Ambiental e Ingeniería de Higiene y Seguridad Industrial de la Universidad Nacional de Ingeniería de Lima, Perú, hizo uso de técnica de análisis documental y el instrumento es la producción del rendimiento del estudiante en situación de evaluación de aprendizaje. Esta investigación logra diagnosticar en que condiciones llegan los estudiantes para afrontar los estudios de cálculo diferencial, concluyendo que los estudiantes muestran deficiencias en el conocimiento de reglas de formación de objetos matemáticos presentes en el cálculo diferencial, esto afectaría a la dimensión conceptual de nuestro estudio. Por otra parte dicho estudio también encontró deficiencia en el conocimiento de los criterios de congruencia para interpretar, en registro literal, representaciones algebraicas, esto afectaría en nuestro estudio a la dimensión del modelamiento de problemas del cálculo diferencial. Esto deja camino para que futuros estudios traten inicialmente estas deficiencias.

Yanapa (2020) en su estudio “Aplicación de videos tutoriales para mejorar el aprendizaje de límites y derivadas en los estudiantes del II Semestre de la Escuela Profesional de Ingeniería Ambiental de la Universidad Católica de Santa María, Arequipa, 2018”, concluyo de que la aplicación de videos tutoriales tiene una mejora significativa en el aprendizaje de límites y derivadas en los 25 estudiantes del grupo experimental, logrando una media de 15.8 frente al grupo control de 25 estudiante que obtuvo 11.1, pero no se hizo la prueba de hipótesis de estas dos medias, limitándose de manera independiente a los análisis en el grupo control y del grupo experimental en pre y pos test, olvidando que lo más importante es contrastar a los dos grupos al final del experimento. Queda claro que los videos al ser demostrativos no brindan herramientas para poder experimentar y ampliar casos.

5.4 Implicancias del estudio

1. La Universidad Andina del Cusco en las asignaturas de Cálculo I, II y III así como en las de Pre cálculo de las escuelas profesionales de ingeniería debe implementar horas de laboratorio con la tecnología de los Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, ya sea como parte de la estructura curricular de las escuelas profesionales de Ingeniería o en su alternativa como asesoramiento académico considerado dentro de las horas lectivas de los docentes.
2. La Universidad Andina del Cusco debe implementar servidores de información para poder ejecutar los Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, dentro de ambientes colaborativos y de desarrollo para todas las escuelas de ingeniería.
3. La Universidad Andina del Cusco, debe promover capacitaciones constantes en las tecnologías alrededor de los Cuadernos interactivos Jupyter python notebook para contar con una plataforma que bien puede ser expandida a otras áreas de la matemática aplicada dentro de los contenidos de asignaturas de especialidad, lo cual indirectamente afectara también a los procesos de investigación en el área de la tecnología e Ingeniería.

CONCLUSIONES

Primera. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran el aprendizaje del Cálculo diferencial, es así que los estudiantes con la metodología clásica lograron un promedio de 14.1 y los del grupo experimental con el uso de los cuadernos interactivos una media de 17.0, es decir, una mejora del 20.57%. La prueba estadística t-student con un nivel de significación del 5% obtuvo un pvalor de 0.000, lo cual establece que existe una diferencia significativa del grupo experimental frente al grupo control.

Segunda. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran la capacidad de resolución de ejercicios del Cálculo diferencial, es así que los estudiantes con la metodología clásica lograron un promedio de 14.0 y los del grupo experimental con el uso de los cuadernos interactivos una media de 17.85, es decir, una mejora del 27.5%. La prueba estadística t-student con un nivel de significación del 5% obtuvo un pvalor de 0.000, lo cual establece que existe una diferencia significativa del grupo experimental frente al grupo control.

Tercera. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran el manejo de conceptos del Cálculo diferencial, es así que los estudiantes con la metodología clásica lograron un promedio de 14.75 y los del grupo experimental con el uso de los cuadernos interactivos una media de 16.83, es decir, una mejora del 14.1%. La prueba estadística t-student con un nivel de significación del 5% obtuvo un pvalor de 0.000, lo cual confirma que existe una diferencia significativa del grupo experimental frente al grupo control.

Cuarta. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter python notebook, mejoran la capacidad de modelar problemas del Cálculo diferencial, es así que los estudiantes con la metodología clásica lograron un promedio de 14.28 y los del grupo experimental con el uso de los cuadernos interactivos una media de 17.3, es decir, una mejora del 21.19%. La prueba estadística t-student con un nivel de significación del 5% obtuvo un pvalor de 0.000, lo cual establece que existe una diferencia significativa del grupo experimental frente al grupo control.

SUGERENCIAS

Primera. A los docentes del Departamento Académico de Matemática, Física, Química y Estadista de la Universidad Andina del Cusco capacitarse en el uso de los Cuadernos interactivos Jupyter python notebook para ser aplicados en los Cursos de Precálculo, Cálculo I, II, III y Métodos Numéricos de las escuelas de Ingeniería. Con un nivel de adecuación también pueden ser aplicados a las asignaturas de Cálculo I y II de las escuelas de ciencias de la salud y del CEAC.

Segunda. A los directores de Escuelas de Ingeniería, precisar las competencia profesionales para incluir las competencias digitales que implique el uso y desarrollo de los entornos interactivos para computación técnica y científica.

Tercera. A las autoridades Universitarias fomentar e Impulsar el uso de Software Libre, desde los sistemas operativos, diseño CAD, ofimática y por supuesto software educativo, esto impulsaría un desarrollo a nivel técnico y capacitación en una primera instancia; la investigación en una segunda instancia y no menos importante el ahorro en licencias.

Cuarta. A los estudiantes de Ingeniería investigar y usar el software libre que está disponible para diversas áreas del conocimiento de la ciencia y de la técnica, sobre todo de aquellas herramientas interactivas que incluyan un lenguaje de programación y se ejecuten en entornos de la nube.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aco E. (2018). Didáctica del docente universitario de matemática y la satisfacción académica de los estudiantes de la escuela de estudios de formación general de la Facultad de Ciencias Básicas y Humanidades de la Universidad Andina del Cusco, año 2016.

Aznar, F., Compañ, P., Pujol, M., Rizo, R., y Sempere, M. (2016). Ipython notebook: Herramienta para integración de teoría y práctica en ingeniería y arquitectura. Jornadas de redes de Investigación en docencia universitaria XIV , (pp. 1678-1690). https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/59820/1/XIV-Jornadas-Redes-ICE_124.pdf.

Barreno, N., Román W., y Olalla J. (2017). Software libre matemático y su incidencia en el aprendizaje del cálculo diferencial. Revista mktDescubre-ESPOCH FADE, (10), 103-110. http://revistas.espoch.edu.ec/index.php/mktdescubre/article/view/147/149

Biggs, J. (2010). Calidad del aprendizaje universitario . NARCEA, S.A. de Ediciones.

Challenger, I., Díaz, Y., y Becerra, R. (2014). El lenguaje de programación python. Ciencias Holguín, (pp. 1-13). https://www.redalyc.org/pdf/1815/181531232001.pdf.

Gallego, D. y Nevot, A. (2008). Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Revista Complutense de Educación , (pp. 95-112). https://core.ac.uk/download/pdf/38820742.pdf.

Guevara, S. (2017). Modelo Heuristico - Divergente para desarrollar el Aprendizaje del Cálculo Diferencial . PhD thesis, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo Lambayeque.

Hernandez, R., Fernandez, C., & Baptista, P. (2015). Metodología de la investigación. McGraw-Hill.

Irazoqui, E. (2014). El aprendizaje del Cálculo diferencial: Una propuesta basada en la Modularización. PhD thesis, Universidad de Bio Bio.

Lorandi, A., Hermida, G., García, A., García, P., y Ortigoza, G. (2017). Llevando python a las aulas. Coloquio de Investigación Multidiciplinara , (5-2), 1472-1478. https://www.uv.mx/veracruz/uvca281dinamicadesistemas/files/2017/12/JournalCIM-2017-final-1.pdf.

Marqués, P. (1996). El software educativo. Comunicación educativa y Nuevas Tecnologías , (pp.119-144).

http://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/educativo_de_pere_MARQUES.pdf.

Mendoza, E. (2017). Trabajo en equipo en el aprendizaje de derivadas en estudiantes de la universidad nacional del altiplano-puno. Master's thesis, Universidad Nacional del Altiplano.

Mosquera, M. (2017). Análisis comparativo de software matemático para la formación de competencias de aprendizaje en cálculo diferencial. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6157572.pdf

Nevot, A. (2001). Estilos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. https://www.academia.edu/6323966/Estilos_de_aprendizaje_y_ense%C3%B1anza_de_las_Matem%C3%A1ticas_Antonio_Nevot_Luna_0?source=swp_share.

Quishpe, M. (2021). Aprendizaje en el área de matemática: una propuesta pedagógica desde el aprendizaje basado en competencias. http://repositorio.puce.edu.ec/bitstream/handle/22000/18692/Quishpe%20Pilco-Tesis.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Riveros, V. y Mendoza, M. (2005). Bases teóricas para el uso de las tic en la educación. Encuentro Educacional , (12-3), 315-336. http://www.revencyt.ula.ve/storage/repo/ArchivoDocumento/educa/v12n3/articulo1.pdf.

Sanchez, H. y Reyes, C. (2015). Metodología y diseños de la investigación científica (5a ed). Lima: Business Support Anneth SRL.

Serrano B., Garzón V., González A., Cervantes A. (2020). El laboratorio computacional matemático, como complemento para promover el aprendizaje del cálculo diferencial. Revista Metropolitana de Ciencias Aplicadas, 3(2), 81-89. http://remca.umet.edu.ec/index.php/REMCA/article/download/269/302.

Riveros, V., Mendoza, M., y Castro, R. (2011). Las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de instrucción de la matemática. Quórum Académico , (8-15), 111-130. https://www.redalyc.org/pdf/1990/199018964007.pdf.

Valverde, A. (2018). Los registros de representación semiótica en el aprendizaje del cálculo diferencial, esudio de caso, en estudiantes de la facultad de ingeniería ambiental de la universidad nacional de ingeniería - lima - 2013. Master's thesis, Universidad Nacional de Educaci'on Enrique Guzmán y Valle.

Valverde, J. (2005). Software libre, alternativa tecnológica para la educación. Actualidades investigati-as en educación. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/9150/17522.

Vásquez R. (2017). Utilización de un entorno virtual de enseñanza y aprendizaje en el cálculo diferencial de una variable con aplicaciones a la economía. http://repositorio.unjbg.edu.pe/handle/UNJBG/1529.

Yanapa E. (2020). Aplicación de videos tutoriales para mejorar el aprendizaje de límites y derivadas en los estudiantes del II Semestre de la Escuela Profesional de Ingeniería Ambiental de la Universidad Católica de Santa María, Arequipa, 2018. http://tesis.ucsm.edu.pe/repositorio/handle/UCSM/10132.

PSF (2017). Python (3.7)[software]. http://www.python.org.

R Core Team (2020). R (3.6.3)[software] R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, https://www.R-project.org.

RStudio Team (2020). RStudio (1.4.1103)[software] RStudio: Integrated Development for R. http://www.rstudio.com.

Sage (2020). SageMath (9.2)[software]. https://www.sagemath.org.

WinP (2019). WinPython (3.7.3)[software]. https://winpython.github.io.

WxMax (2020). WxMaxima (20.12.2)[software]. https://wxmaximadevelopers.github.io/wxmaxima/index.html.

Instrumento de Recolección de datos

UNIVERSIDAD ANDINA DEL CUSCO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL
Asignatura: CÁLCULO I

Distinguido estudiante:
Se esta desarrollando un estudio acerca del aprendizaje del Cálculo diferencial de los estudiantes de esta escuela profesional cuyo objetivo fundamental es obtener un conjunto de sugerencias y estrategias para fortalecer las bases matemáticas de los futuros ingenieros civiles. Conocedores de vuestro espíritu universitario y de colaboración, rogamos muy encarecidamente contestar las preguntas de este cuestionario, con el cual se recoge vuestro conocimiento en el área del Cálculo Diferencial.

CUESTIONARIO
CÁLCULO DIFERENCIAL: LÍMITES Y DERIVADAS

Instrucciones

- Esta es una evaluación diagnóstica que tiene como único objetivo conocerte para poder orientarte mejor, por lo tanto, te pedimos absoluta honestidad.
- Solicitamos también tu mejor esfuerzo, trata de responder las 30 preguntas.
- Lee detenidamente cada pregunta antes de seleccionar la respuesta que considere.
- Puedes hacer los cálculos auxiliares que consideres en el revés de cada página.

1. Sea la función $f(x) = |x+1| - |x-1|$, $|x| > 1$.
   El valor de la siguiente expresión $E = \lim_{x \to 1^+} f(x) - \lim_{x \to -1^-} f(x)$, es
   a) -4
   b) -2
   c) 0
   d) 4

2. Seleccione la definición de límite que esta incorrectamente formulada:
   a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si
      $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < |x-a| < \delta$
   b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ si y sólo si
      $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $a - \delta < x < a$
   c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ si y sólo si
      $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ tal que $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$
   d) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si y sólo si
      $\forall N > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |f(x) - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$

3. Seleccione la afirmación que es falsa.

   a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-a^x}{\sin x} = \ln(a)$

   b) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

   c) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

   d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^{-x}-1}{x} = -\ln(a)$

4. El límite trigonométrico de $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$, es:

   a) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

   c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   d) $-\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

5. De la definición de derivada, para la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, es
   $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
   Si realizamos el cambio de variable $x = a + \Delta x$, la derivada de f evaluada en el punto fijo a, será por tanto:

   a) $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

   b) $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x+a}$

   c) $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)+f(a)}{x-a}$

   d) $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)+f(a)}{x+a}$

6. La reglas falsa, es:

   a) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{f(x)^n}\right] = n\dfrac{f'(x)}{f(x)^{n+1}}$, con $n\in\mathbb{N}$

   b) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)g(x)}{h(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)-f(x)g(x)h'(x)}{h(x)^2}$

   c) $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

   d) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)h(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x)h(x)-f(x)g'(x)h(x)-f(x)g(x)h'(x)}{g(x)^2h(x)^2}$

7. El resultado de $\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}$, es:

   a) $\sin(x)$

   b) $\cos(x)$

   c) $-\cos(x)$

   d) $-\sin(x)$

8. Si x es función de y, donde $x = y^y$, cual de las siguientes afirmaciones es correcta

   a) $x' = y\,(1 + \ln(y))$

   b) $x' = y^y\,(1 + \ln(y^y))$

   c) $x' = x\ln(y^y)$

   d) $x' = x\,(1 + \ln(y))$

9. Sea la función $x(t) = \dfrac{e^{kt}}{k}$, donde $k \in \mathbb{R}$. La n-ésima derivada, es:

   a) $x^{(n)}(t) = n^n x(t)$

   b) $x^{(n)}(t) = k^{n-1} x(t)$

   c) $x^{(n)}(t) = k^n x(t)$

   d) $x^{(n)}(t) = n^{n-1} x(t)$

10. Sea la función $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}$, señale la afirmación correcta:

    a) $y' = (y-1)^{-1}$

    b) $y' = (2y-1)^{-1}$

    c) $y' = (y-2)^{-1}$

    d) $y' = 2(y-1)^{-1}$

11. Sea la función $f(x) = |x - \sqrt{x}|$, señale la afirmaciones incorrecta:

    a) La función es continua en $x = 1$

    b) La derivada lateral por la izquierda en $x = 1$ es $\dfrac{1}{2}$

    c) La derivada lateral por la derecha en $x = 1$ es $\dfrac{1}{2}$

    d) La función es diferenciable en $x = 2$

12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \end{cases}$. Los valores de a y b que permiten a la función sea diferenciable en $x = 1$, son:

    a) $a = 2,\ b = -1$

    b) $a = -1,\ b = 2$

    c) $a = 2,\ b = 2$

    d) $a = 1,\ b = 1$

13. Si f es una función real tal que $f'(x) = 0$ en un intervalo $\langle a, b\rangle$, entonces podemos decir:

    a) $f(x)$ es una función valor absoluto

    b) $f(x)$ es una función lineal

    c) $f(x)$ es una función cuadrática

    d) $f(x)$ es una función constante

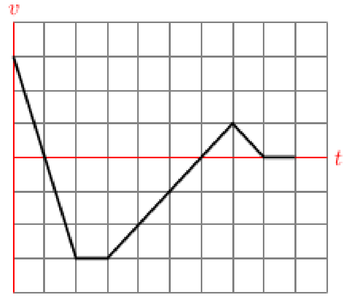
14. Si f, g son funciones reales tales que $f'(x) = g'(x)$ en un intervalo $\langle a, b\rangle$, entonces podemos decir:

    a) $f(x) + g(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$
    b) $f(x) = kg(x),\ k \in \mathbb{R}$
    c) $f(x) = g(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$
    d) $f(x) + kg(x) = 0,\ k \in \mathbb{R}$

15. Un rayo de luz $y - 6 = 0$, proyectado de derecha a izquierda, incide sobre un espejo parabólico $y^2 - 4x + 4 = 0$, entonces el rayo reflejado, es:

    a) $3x + y = 36$
    b) $4x - 3y = 6$
    c) $3x - 4y = 6$
    d) $x - 3y = -8$

16. La figura muestra la velocidad $v = f(t)$ de una partícula que se mueve sobre una recta coordenada, señale la opción incorrecta para la partícula:



    a) en $1 \leq t \leq 6$ la partícula retrocede
    b) en $3 \leq t \leq 7$ su movimiento es acelerado
    c) en $7 \leq t \leq 8$ su movimiento es desacelerado
    d) cuando $2 \leq t \leq 3$ y $8 \leq t \leq 9$ se encuentra en reposo

17. Una explosión lanza una roca verticalmente con una velocidad 50 m/s. La roca alcanza una altura de $h = 50t - 5t^2$ metros después de t segundos. La altura, en metros, que alcanza la roca, es:

    a) 125
    b) 175
    c) 100
    d) 150

18. El periodo de oscilación de un péndulo, P de longitud L es $P = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$. Si el péndulo es metálico, su longitud varia con la temperatura, con una razón $\dfrac{dL}{dT} = kL$. La razón a la que cambia el periodo de dicho péndulo metálico respecto a la temperatura, es:

    a) kP
    b) πkP
    c) $\frac{\pi}{2}kP$
    d) $\frac{1}{2}kP$

19. Una partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante, de modo que su abscisa crece a razón de $10\,m/s$. La rapidez, en rad/s, al cual cambia el ángulo de inclinación de la recta que une la partícula con el origen de coordenadas cuando $x = 3m$, es:

    a) 1

    b) 2

    c) 3

    d) 1/2

20. Un tanque de forma semiesférica de $R = 13m$ de radio, tiene un volumen $V = \frac{\pi}{3}y^2(3R - y)$, donde y es la profundidad de agua. Si dicho tanque se descarga a razón de $54\pi m^3/min$ a que razón decrece la profundad del agua cuando este tiene $8m$.

    a) 2/8

    b) 3/8

    c) 3/4

    d) 2/4

21. Una escalera de $5m$ de longitud esta apoyada sobre una pared vertical cuando su base empieza a resbalarse. En el instante en el que la parte superior esta a $3m$ del suelo se mueve a $4m/s$. La rapidez de cambio, en m^2/s, del área formada por la escalera, la pared y el suelo en ese momento, es:

    a) 7/16

    b) 7/4

    c) 7/2

    d) 7/8

22. Sea la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 9)^2}$. Un intervalo de decrecimiento de la función, es:

    a) $\langle -3, 0\rangle$

    b) $\langle 3, +\infty\rangle$

    c) $\langle -3, 3\rangle$

    d) $\langle -\infty, -3\rangle$

23. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$. Usando el criterio de la segunda derivada, señale la afirmación que es verdadera:

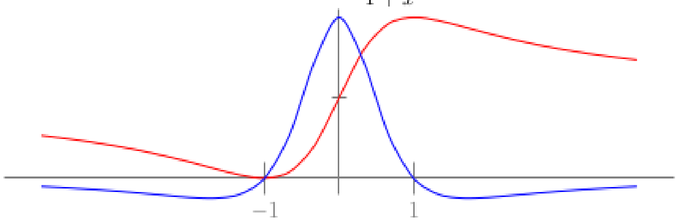
    a) Tiene un máximo local en $x = 1 + \sqrt{3}$

    b) Tiene un mínimo local en $x = 1 + \sqrt{3}$

    c) Tiene un mínimo local en $x = 1 - \sqrt{3}$

    d) Tiene un punto crítico en $x = 0$

24. La figura muestra la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ y su derivada. Señale la opción correcta.



a) Hay un punto de inflexión en $x = -1$

b) Hay un punto de inflexión en $x = 1$

c) Hay un extremo relativo en $x = 0$

d) Hay un punto de inflexión en $x = 0$

25. El triángulo de mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio R, teniendo como base el diámetro, es:

a) $2R^2$

b) R^2

c) $\frac{1}{4}R^2$

d) $\frac{1}{2}R^2$

26. La siguiente función $P(x) = \dfrac{100\sqrt{x}}{\frac{3}{100}x^2 + 9}$ determina el porcentaje de polución controlada en una ciudad, donde x está dada en millones de dólares. El gasto que generaría el control del más alto porcentaje de polución, es:

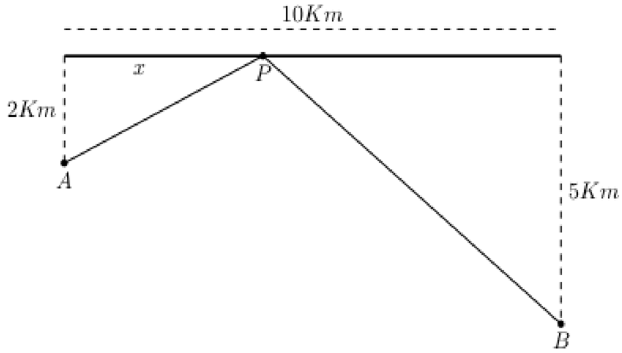
a) 12

b) 9

c) 10

d) 8

27. Dos poblaciones se encuentran hacia el lado sur de un rio. Se debe ubicar una estación de bombeo para abastecer a dichos pueblos. El valor de x de modo minimice la cantidad total de tubería, es.



a) 4

b) 3

c) 20/7

d) 5

28. El radio de un circulo se dilata de $2.00m$ a $2.02m$. El incremento estimado en el área en cm^2 de dicho círculo, es:

    a) 808π

    b) 804π

    c) 800π

    d) 802π

29. La arista de un cubo mide $10cm$, con un error del 1 por ciento. El porcentaje de error en el cálculo del volumen de dicho cubo, es:

    a) 4

    b) 2

    c) 1

    d) 3

30. Un ingeniero, parado a $30m$ de la base de un edificio, mide un ángulo de elevación de 75° desde la parte superior del edificio. Si el porcentaje de error al estimar la altura del edificio es menor al 4 por ciento, el error en el ángulo, en radianes, es:

    a) 0.02

    b) 0.01

    c) 0.04

    d) 0.03

Validación de Instrumentos

FICHA DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

I. DATOS GENERALES:

Título del trabajo de investigación:

Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, y el nivel de aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II

Nombre del instrumento: Cuestionario

Investigador: Luis Alberto Vargas Añamaco

CRITERIO	INDICADORES	CRITERIOS	Deficiente 0-20%	Regular 21-40%	Bueno 41-60%	Muy Bueno 61-80%	Excelente 81-100%
Forma	1.REDACCIÓN	Los indicadores e ítemes están redactados considerando los elementos necesarios.			X		
	2.CLARIDAD	Está formulado con un lenguaje apropiado.			X		
	3.OBJETIVIDAD	Está expresado en conductas observables.				X	
Contenido	4.ACTUALIDAD	Es adecuado al avance de la ciencia y la tecnología.					X
	5.SUFICIENCIA	Los ítemes son adecuados en cantidad y profundidad.			X		
	6.INTENCIONALIDAD	El instrumento mide en forma pertinente el comportamiento de las variables de investigación.			X		
Estructura	7.ORGANIZACIÓN	Existe una organización lógica entre todos los elementos básicos de la investigación.				X	
	8.CONSISTENCIA	Se basa en aspectos teóricos científicos de la investigación educativa.			X		
	9.COHERENCIA	Existe coherencia entre los ítemes, indicadores, dimensiones y variables				X	
	10.METODOLOGÍA	La estrategia de investigación responde al propósito del diagnóstico.				X	

II. LUEGO DE REVISADO EL INSTRUMENTO:

PROMEDIO: 72 %

Procede su aplicación ☒

Debe corregirse ☐

Firma

Dr.: Leoncio Zárate Gamarra

DNI: 10830137

Teléfono: 984990170

FICHA DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

I. DATOS GENERALES:

Título del trabajo de investigación:

Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, y el nivel de aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II

Nombre del instrumento: Cuestionario

Investigador: Luis Alberto Vargas Añamaco

CRITERIO	INDICADORES	CRITERIOS	Deficiente 0-20%	Regular 21-40%	Bueno 41-60%	Muy Bueno 61-80%	Excelente 81-100%
Forma	1.REDACCIÓN	Los indicadores e ítemes están redactados considerando los elementos necesarios.				X	
	2.CLARIDAD	Está formulado con un lenguaje apropiado.				X	
	3.OBJETIVIDAD	Está expresado en conductas observables.					X
Contenido	4.ACTUALIDAD	Es adecuado al avance de la ciencia y la tecnología.					X
	5.SUFICIENCIA	Los ítemes son adecuados en cantidad y profundidad.					X
	6.INTENCIONALIDAD	El instrumento mide en forma pertinente el comportamiento de las variables de investigación.				X	
Estructura	7.ORGANIZACIÓN	Existe una organización lógica entre todos los elementos básicos de la investigación.					X
	8.CONSISTENCIA	Se basa en aspectos teóricos científicos de la investigación educativa.					X
	9.COHERENCIA	Existe coherencia entre los ítemes, indicadores, dimensiones y variables				X	
	10.METODOLOGÍA	La estrategia de investigación responde al propósito del diagnóstico.					X

II. LUEGO DE REVISADO EL INSTRUMENTO:

PROMEDIO: 90 %

Procede su aplicación ☒

Debe corregirse ☐

Firma

Dr.: Guido Alvarez Jáuregui

DNI: 23868575

Teléfono: 984736177

FICHA DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

I. DATOS GENERALES:

Título del trabajo de investigación:

Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, y el nivel de aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II

Nombre del instrumento: Cuestionario

Investigador: Luis Alberto Vargas Añamaco

CRITERIO	INDICADORES	CRITERIOS	Deficiente 0-20%	Regular 21-40%	Bueno 41-60%	Muy Bueno 61-80%	Excelente 81-100%
Forma	1.REDACCIÓN	Los indicadores e ítemes están redactados considerando los elementos necesarios.				X	
	2.CLARIDAD	Está formulado con un lenguaje apropiado.				X	
	3.OBJETIVIDAD	Está expresado en conductas observables.					X
Contenido	4.ACTUALIDAD	Es adecuado al avance de la ciencia y la tecnología.					X
	5.SUFICIENCIA	Los ítemes son adecuados en cantidad y profundidad.					X
	6.INTENCIONALIDAD	El instrumento mide en forma pertinente el comportamiento de las variables de investigación.				X	
Estructura	7.ORGANIZACIÓN	Existe una organización lógica entre todos los elementos básicos de la investigación.					X
	8.CONSISTENCIA	Se basa en aspectos teóricos científicos de la investigación educativa.					X
	9.COHERENCIA	Existe coherencia entre los ítemes, indicadores, dimensiones y variables				X	
	10.METODOLOGÍA	La estrategia de investigación responde al propósito del diagnóstico.					X

II. LUEGO DE REVISADO EL INSTRUMENTO:

PROMEDIO: 90 %

Procede su aplicación ☒

Debe corregirse ☐

Firma

Dr.: VELASQUEZ HACHA IGNACIO

DNI: 23988755

Teléfono: 913216984

Anexo 1: Matriz de consistencia

Título: Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, y el nivel de aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.

PROBLEMA	OBJETIVO	HIPÓTESIS	VARIABLES
¿En qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, influyen en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II?	Determinar en que medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, influyen en el nivel de aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, influyen significativamente en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	Aprendizaje del Cálculo Diferencial: • Capacidad de Resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial. • Manejo de Conceptos del Cálculo Diferencial. • Capacidad de Modelar problemas del Cálculo Diferencial.
1.- ¿En qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran la capacidad de Resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II?	1.- Determinar en que medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran la capacidad de Resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	1.- El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente la capacidad de Resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	

2. ¿En qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran el manejo de Conceptos del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II?	2. Determinar en qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran el manejo de Conceptos del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	2. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente el manejo de Conceptos del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	
3. ¿En qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran la capacidad de Modelar problemas del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II?	3. Determinar en qué medida el uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran la capacidad de Modelar problemas del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	3. El uso de Cuadernos interactivos, Jupyter Python Notebook, mejoran significativamente la capacidad de Modelar problemas del Cálculo Diferencial en los estudiantes del tercer ciclo de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad Andina del Cusco 2019-II.	

Anexo 2: Tabla de datos

PRE TEST						POS TEST					
Grupo control			Grupo experimental			Grupo control			Grupo experimental		
RE	MC	MP	RE	MC	MP	RE	MC	MP	RE	MC	MP
10	10	9	9	8	6	14	14	14	17	16	14
8	8	7	9	12	10	13	12	11	17	19	18
9	12	12	10	14	12	14	17	16	20	18	20
9	10	9	11	16	14	13	15	13	19	18	19
10	14	14	11	16	12	15	18	18	20	17	20
12	12	11	11	14	12	17	16	15	19	16	20
8	8	7	9	10	10	12	13	11	16	17	17
9	9	8	10	10	10	13	13	13	17	17	17
11	10	12	11	14	12	16	14	17	20	18	19
9	10	10	12	16	14	13	15	14	19	19	18
12	11	12	6	8	8	17	16	17	16	15	15
12	12	11	9	10	8	16	17	15	16	17	15
8	8	8	7	6	6	13	12	13	15	13	16
6	8	8	10	10	8	10	12	12	17	17	16
12	12	12	6	8	8	17	17	17	16	15	15
12	12	9	10	10	8	17	17	14	18	18	16
9	12	9	11	12	10	14	17	13	19	18	17
10	10	10	11	12	12	14	15	14	19	19	18
11	12	12	11	14	12	15	17	17	20	18	18
9	8	8	8	8	8	14	13	12	16	15	16
10	10	10	12	18	18	14	15	15	19	17	20
10	11	11	10	12	12	14	16	15	17	19	19
8	10	10	11	12	10	13	15	14	19	18	18
9	10	9	10	12	12	14	14	14	18	19	20
10	10	11	9	10	10	15	14	15	18	17	18
11	10	12	6	8	8	16	14	17	16	15	16
11	12	14	8	8	8	15	16	15	16	14	15
9	10	10	11	12	12	13	15	15	19	17	18
8	8	8	10	14	14	12	13	13	19	17	18
12	16	13	11	12	12	16	17	18	20	18	19
11	10	10	10	12	10	16	15	15	20	17	18
8	8	7	10	10	10	12	13	11	17	17	17
10	12	9	12	14	14	15	17	13	20	18	19
8	8	10	8	12	12	12	13	14	18	16	19
7	8	7	10	12	10	12	12	12	18	16	18
8	8	10	7	6	6	13	13	15	15	13	13
8	10	10	8	10	8	13	14	14	18	17	16
9	9	9	8	8	6	13	14	13	16	16	13
6	10	8	8	10	10	10	14	12	18	17	18
10	12	11	9	10	8	15	16	15	17	15	16

Anexo 3: Código R – Pruebas de hipótesis

```
PHvarianza <- function(x1,x2,alpha=0.05) {
  v1 <- var(x1)
  v2 <- var(x2)
  n1 <- length(x1)
  n2 <- length(x2)

  fk <- v1/v2
  fI <- qf(alpha, n1 - 1, n2 - 1)
  fD <- qf(1 - alpha, n1 - 1, n2 - 1)
  f1 <- qf(alpha/2, n1 - 1, n2 - 1)
  f2 <- qf(1 - alpha/2, n1 - 1, n2 - 1)

  print(paste("Fk:", fk))
  print("Prueba Izquierda")
  print(paste("RC: [0 , ", fI, ">", sep=""))
  print(paste("pV:", pf(fk,n1-1,n2-1)))

  print("Prueba Derecha")
  print(paste("RC: <", fD, " , +oo>", sep=""))
  print(paste("pV:", 1-pf(fk,n1-1,n2-1)))

  print("Prueba Bilateral")
  print(paste("RC: [0 , ", f1, "> o <", f2,  " , +oo>", sep=""))
  print(paste("pV:", 2-2*pf(fk,n1-1,n2-1)))
}
```

```
PHt <- function(x1,x2,varIg=TRUE,alpha=0.05) {
  xb1 <- mean(x1)
  xb2 <- mean(x2)
  v1 <- var(x1)
  v2 <- var(x2)
  n1 <- length(x1)
  n2 <- length(x2)

  if (varIg) {
    vC <- ((n1-1)*v1 + (n2-1)*v2) / (n1+n2-2)
    tk <- (xb1 - xb2)/sqrt(vC*(1/n1 + 1/n2))
    gl <- n1 + n2 - 2

  } else {
    r  <- (v1/n1 + v2/n2)^2/( (v1/n1)^2/(n1-1) + (v2/n2)^2/(n2-1) )
    gl <- round(r)
    tk <- (xb1 - xb2)/sqrt(v1/n1 + v2/n2)
  }

  tI <- qt(alpha, gl)
  tD <- qt(1 - alpha, gl)
  t1 <- qt(alpha/2, gl)
  t2 <- qt(1 - alpha/2, gl)

  print(paste("Tk:", tk))
  print(paste("GL:", gl))
  print("Prueba Izquierda")
  print(paste("RC: <-oo , ", tI, ">", sep=""))
  print(paste("pV:", pt(tk,n1+n2-2)))

  print("Prueba Derecha")
  print(paste("RC: <", tD, " , +oo>", sep=""))
  print(paste("pV:", 1-pt(tk,n1+n2-2)))
    print("Prueba Bilateral")
  print(paste("RC: <-oo , ", t1, "> o <", t2,  " , +oo>", sep=""))
  print(paste("pV:", 2*pt(tk,n1+n2-2)))
}
```

Programa principal

```
source("pHipotesis.R")
db <- read.csv("DB.csv")
library(ggplot2)

#Estadisticos descriptivos
descripcion = function(A,B) {
  M <- matrix(40,5,2)
  M[2,1] <- mean(A)
  M[2,2] <- mean(B)
  M[3,1] <- sd(A)
  M[3,2] <- sd(B)
  M[4,1] <- 100*M[3,1]/M[2,1]
  M[4,2] <- 100*M[3,2]/M[2,2]
  M[5,1] <- min(A)
  M[5,2] <- min(B)

  row.names(M) <- c("Recuento","Promedio","Desv","Coef Var","Mín")
  return(M)
}

#Dimension 1
descripcion(db$AgcRE,db$AgeRE)
descripcion(db$BgcRE,db$BgeRE)
sf.test(db$BgcRE)
sf.test(db$BgeRE)

#intervalo de confianza
qt((1+0.95)/2,39)*sd(db$BgcRE)/sqrt(40)
qt((1+0.95)/2,39)*sd(db$BgeRE)/sqrt(40)

dt <- data.frame(grupo = factor(rep(c("Control","Experimental"),
      each=40)), nota = c(db$BgcRE,db$BgeRE))
ggplot(dt,aes(x=grupo,y=nota)) + geom_boxplot() +
      scale_y_continuous(name="Resolución de ejercicios", breaks=0:20)

PHvarianza(db$BgcRE,db$BgeRE)
PHt(db$BgcRE,db$BgeRE)
```

```
#Dimension 2
descripcion(db$AgcMC,db$AgeMC)
descripcion(db$BgcMC,db$BgeMC)
sf.test(db$BgcMC)
sf.test(db$BgeMC)

#intervalo de confianza
qt((1+0.95)/2,39)*sd(db$BgcMC)/sqrt(40)
qt((1+0.95)/2,39)*sd(db$BgeMC)/sqrt(40)

dt <- data.frame(grupo = factor(rep(c("Control","Experimental"),
      each=40)), nota = c(db$BgcMC,db$BgeMC))
ggplot(dt,aes(x=grupo,y=nota)) + geom_boxplot() +
      scale_y_continuous(name="Manejo de conceptos", breaks=0:20)

PHvarianza(db$BgcMC,db$BgeMC)
PHt(db$BgcMC,db$BgeMC)

#Dimension 3
descripcion(db$AgcMP,db$AgeMP)
descripcion(db$BgcMP,db$BgeMP)
sf.test(db$BgcMP)
sf.test(db$BgeMP)

#intervalo de confianza
qt((1+0.95)/2,39)*sd(db$BgcMP)/sqrt(40)
qt((1+0.95)/2,39)*sd(db$BgeMP)/sqrt(40)

dt <- data.frame(grupo = factor(rep(c("Control","Experimental"),
      each=40)), nota = c(db$BgcMP,db$BgeMP))
ggplot(dt,aes(x=grupo,y=nota)) + geom_boxplot() +
      scale_y_continuous(name="Modelamiento de problemas", breaks=0:20)

PHvarianza(db$BgcMP,db$BgeMP)
PHt(db$BgcMP,db$BgeMP)
```

```
#Aprendizaje
descripcion(db$AGC,db$AGE)
descripcion(db$BGC,db$BGE)
sf.test(db$BGC)
sf.test(db$BGE)

#intervalo de confianza
qt((1+0.95)/2,39)*sd(db$BGC)/sqrt(40)
qt((1+0.95)/2,39)*sd(db$BGE)/sqrt(40)

dt <- data.frame(grupo = factor(rep(c("Control","Experimental"),
      each=40)), nota = c(db$BGC,db$BGE))
ggplot(dt,aes(x=grupo,y=nota)) + geom_boxplot() +
      scale_y_continuous(name="Aprendizaje", breaks=0:20)

PHvarianza(db$BGC,db$BGE)
PHt(db$BGC,db$BGE)
```

Anexo 4: Cuadernos Interactivos Jupyter Python Notebook

0.Inicio

January 22, 2021

Jupyter es un aplicación web que es capaz de desplegar páginas web vinculadas que contienen bloques de texto y bloques de código.

Los bloque de texto se codifican en un lenguaje moderno denominado Markdown que incluye todos los elementos necesarios para poder maquetar información, con el añadido de poder renderizar formulas matemáticas codificadas en LaTeX, gracias a su motor MathJax.

Los bloques de código son espacios interactivos donde se modelan, realizan y ejecutan ejercicios o aplicaciones matemáticas utilizando un lenguaje de programación, en nuestro caso, Python.

Python es un lenguaje moderno que gracias a sus extensiones o módulos es capaz de realizar computos de tipo numérico, simbólico, estadístico y otros.

1 Contenido

1.1 Introducción

1. Lenguaje Python
2. Sympy
3. Markdown

1.2 Cálculo diferencial

1. Límites
   - 1.1 Cálculo de límites
   - 1.2 Límites laterales
   - 1.3 Límites infinitos
   - 1.4 Límites al infinito
   - 1.5 Límites trigonométricos
   - 1.6 Límites de funciones trascendentes
2. Derivada
   - 2.1 Derivada implícita
   - 2.2 Derivadas de orden superior
   - 2.3 Rectas Tangentes
   - 2.4 Máximos y mínimos
   - 2.5 Diferenciales

1.Python

January 20, 2021

1 Python

Python es un lenguaje de programación dinámico e interpretado cuya filosofía hace hincapié en una sintaxis que favorezca un *código legible*.

Jupyter es un entorno de trabajo open source orientado a científicos que soporta muchos lenguajes de programación entre ellos a Python.

Jupyter Notebook es un documento que nos permite desarrollar un trabajo de forma interactiva, para esto cuenta con celdas código, en lenguaje Python, que pueden ser ejecutadas en cualquier momento. Las celas de texto pueden ser codificadas en Markdown con soporte para la redacción de texto científico con latex.

[1]:
```
2+3/5
```

[1]: 2.6

1.1 Operaciones aritméticas

Para realizar las operaciones matemáticas escriba las expresiones en la celda y a continuación **SHIFT+ENTER.**

[2]:
```
5 + 6 * 21/18 - 2**3
```

[2]: 4.0

1.2 Operadores

Operación	Operador	Ejemplo
Potencia	**	a ** b
Multiplicación	*	a * b
Resto	%	a % b
División	/	a / b
División entera	//	a // b
Suma	+	a + b
Resta	-	a - b

1.3 Variables

Las variables son las posiciones de memoria con nombre, usadas para contener datos. Para definir variables utiliza la siguiente sentencia, sentencia de asignación:

`Python      NombreDevariable = Expresion`

Para almacenar el valor del área de un círculo de radio 5 en la variable *area*:

[3]:
```
import math

area = math.pi*5**2
area
```

[3]: 78.53981633974483

> **math** es un módulo, una extensión de Python, que incluye las funciones matemáticas mas comunes

1.4 Funciones Matemáticas

`Python` `ceil, comb, fabs, factorial, floor, gdc, trunc, exp, log, log2, log10, sqrt, sin, cos, tan, asin, acos, atan, degrees, radians, sinh, cosh, tanh, asinh, acosh, atanh, pi, e.` > para números complejos se tiene el modulo **cmath**.

[4]:
```
math.radians(180/2)
```

[4]: 1.5707963267948966

[5]:
```
math.degrees(_)
```

[5]: 90.0

2 Elementos de programación

Las celdas pueden contener secuencias de código. Para imprimir resultados se debe usar la función **print**.

```
#Calcular los segundos en una semana
minuto = 60
```

```
hora = 60 * minuto
dia = 24 * hora
semana = 7 * dia
print(semana)
```

[6]:
```
#Calcular los segundos en una semana
minuto = 60
hora = 60 * minuto
dia = 24 * hora
semana = 7 * dia
print(semana)
```

```
604800
```

2.1 Funciones

Las funciones implementan subrutinas que pueden ser llamadas por el código dentro de la misma celda o en otras de la misma hoja.

```
def nombre_funcion(argumentos):
     sentencias
     return resultlado
```

[7]:
```
def sumaN(N):
    '''Determina la suma de los N primeros números enteros
       N : El límite de la Suma'''

    Suma = N*(N+1)/2
    return Suma

sumaN(10)
```

[7]: 55.0

[8]:
```
sumaN(10) - sumaN(9)
```

[8]: 10.0

Para definir una función algebraica $f(x) = \dfrac{|x| + x}{\lfloor x \rfloor + x}$

[9]:
```
import math

def f(x):
    return (math.fabs(x) + x)/(math.floor(x) + x)

f(2)
```

[9]: 1.0

Si la función se limita a una expresión puede implementarse con la sentencia:

[10]:
```
es_impar = lambda n: n%2 != 0
```

[11]:
```
es_impar(121)
```

[11]:
```
True
```

2.2 Sentencias algorítmicas

2.2.1 Sentencia selectiva

Python posee operadores relaciones y lógicos para el control de flujo en la sentencia selectiva.

Operador	Comentario
$<$	menor que
$<=$	menor o igual que
$>$	mayor que
$>=$	mayor o igual que
$!=$	diferente a
$==$	igual a

Operadores relacionales

Operador	Comentario
and	y
or	o
xor	o ex
not	no

Operadores lógicos **La estructura selectiva tiene el siguiente esquema:**

```
if expresión lógica:
    #bloque verdadero
else:
    #bloque falso
```

Alternativamente

`Python if condicion1:     #bloque de instrucciones 1 elif condicion2:     #bloque de instrucciones 2     ... else:     #bloque de instrucciones final`

La función signo y la función factorial:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$n! = n \cdot (n-1)!$

[12]:
```
def signo(x):
    #Implementa la función signo

    if x < 0:
        return -1
    elif x == 0:
        return 0
    else:
        return 1

signo(-815)
```

[12]: -1

[13]:
```
def factorial(n):
    #Implementa la función factorial

    if n == 0:
        return 1
    elif n == 1:
        return 1
    else:
        return n*factorial(n-1)

factorial(10)
```

[13]: 3628800

2.2.2 Bucles

Python presenta dos entencias de repetición. La estructura *for* para bucles controlados por contador y la estructura *while* para bucles controlados por centinela.

Bucle for Es una estructura algorítmica que nos permite implementar un ciclo reiteerativo fijo.

`Python for elemento in lista:     #sentencias`

[14]:
```
#Determina la suma de los N pares
N = 4
S = 0
par = 0
for i in range(N):
    par += 2
    S += par
print(S)
```

```
20
```

Bucle while Es una estructura algorítmica que nos permite implementar un ciclo reiteerativo variable.

`Python while expresion lógica:     #sentencias`

[15]:
```python
def mcd(A,B):
    """ Determina el MCD(A,B)
     A: numero mayor
     B: numero menor
     retorna el Maximo Comun Divisor de A y B """

    r = B
    while (r != 0):
        r = A%B
        A = B
        B = r
    return A

mcd(14,49)
```

[15]: 7

2.3 Lista

Una lista es una estructura de datos y un tipo de dato en python con características especiales. Python permite almacenar cualquier tipo: como enteros, cadenas, listas, funciones.

[16]:
```python
lista = [1, 1.5, "Python", lambda x:x**2]
```

[17]:
```python
lista[2]
```

[17]: 'Python'

[18]:
```python
lista[3](5)
```

[18]: 25

2.3.1 Métodos de las listas

- *append(x)* agrega ell elemento x al final de la lista.
- *insert(i, x)* inserta x en la posición i de la lista.
- *remove(x)* elimina el primer ítem de la lista cuyo valor sea x.
- *pop(i)* extrae el i-esimo elemento de la lista.

[19]:
```python
lista.append(3/2)
```

[20]:
```python
lista
```

[20]: [1, 1.5, 'Python', <function __main__.<lambda>(x)>, 1.5]

```
[21]: lista.insert(3,'es facil')
```

```
[22]: lista
```

[22]: [1, 1.5, 'Python', 'es facil', <function __main__.<lambda>(x)>, 1.5]

```
[23]: lista.remove(1.5)
```

```
[24]: lista
```

[24]: [1, 'Python', 'es facil', <function __main__.<lambda>(x)>, 1.5]

```
[25]: lista.pop(0)
```

[25]: 1

```
[26]: lista
```

[26]: ['Python', 'es facil', <function __main__.<lambda>(x)>, 1.5]

```
[27]: lista.pop()
```

[27]: 1.5

```
[28]: lista
```

[28]: ['Python', 'es facil', <function __main__.<lambda>(x)>]

2.4 List comprehension

Son expresiones que genera listas a partir de otras listas.

[Expresión for variable in secuencia [if condición]]

```
[29]: [2*t for t in [0,1,2,3,4,5]]
```

[29]: [0, 2, 4, 6, 8, 10]

```
[30]: [t**2 for t in range(10) if t%2 == 0]
```

[30]: [0, 4, 16, 36, 64]

2.5 Tuplas

Las tuplas son listas inmutables.

[31]:
```
(2,3,-3)
```

[31]:
```
(2, 3, -3)
```

[32]:
```
3,4,5
```

[32]:
```
(3, 4, 5)
```

[33]:
```
[(t**2,t**3) for t in range(1,11)]
```

[33]:
```
[(1, 1),
 (4, 8),
 (9, 27),
 (16, 64),
 (25, 125),
 (36, 216),
 (49, 343),
 (64, 512),
 (81, 729),
 (100, 1000)]
```

3 Cuestionario

1. Escriba una función que resuelva la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$
2. Escriba una función para determinar la suma de los N primeros números impares. Genere el número impar desde el contador.
3. Escriba una función que sume los N primeros múltiplos de m.
4. Escriba una función que determine el mínimo comun múltiplo de dos enteros.
5. Formule una expresión que contenga una lista con tuplas de la tabla de multiplicar por 7.
6. Escriba una función que implementa la suma de dos fracciones. Cada fracción será una lista.

2.Sympy

January 20, 2021

1 Sympy

Para usar este módulo lo importamos usando

`from sympy import *`

Para que que los resultados se renderizen utilizando **Latex** llamamos a:

`init_printing()`

[1]:
```
from sympy import *

init_printing()
```

2 Symbolos

Para definir simbolos algebraicos usamos la función `symbols` el resultado debería ser asignado a una variable que coincida con dicho nombre. Por defecto el tipo que se genera es un número $\mathbb{C}$.

`x = symbols('x')`

por tanto para obtener todas las raices cubicas de la unidad, resolvemos la ecuación: $x^3 - 1 = 0$.

[2]:
```
x = symbols('x')
solve(x**3 - 1,x)
```

[2]:

$$\left[1, \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}, \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right]$$

En cambio para la raíz real de la ecuación: $x^3 - 1 = 0$.

[3]:
```
x = symbols('x',real=true)
solve(x**3 - 1,x)
```

[3]: $[1]$

[4]:
```
n = symbols('n',integer=true,positive=true)

cos(n*pi)
```

[4]: $(-1)^n$

3 Operaciones basicas

3.1 Sustitución

Se debe usar el método subs de la expresión.

Obtenga el factor racionalizante de: $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$

[5]:
```
x,y,a,b = symbols('x y a b',real=true)
```

[6]:
```
( a**3 - b**3 ).factor()
```

[6]: $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

[7]:
```
cn = Eq((a**3 - b**3)/(a-b) , a**2 + a*b + b**2)
cn
```

[7]: $$\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$$

[8]:
```
cn.subs({a: x**Rational(1,3) , b: y**Rational(1,3)})
```

[8]: $$\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = x^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + y^{\frac{2}{3}}$$

El factor racionalizante es: $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right) = x-y$

3.2 Evaluación numérica

Use el método evalf de la expresión simbólica.

[9]:
```
pi , pi.evalf()
```

[9]: $(\pi,\ 3.14159265358979)$

[10]:
```
# El número de e con 60 digitos
exp(1).evalf(60)
```

[10]: $2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496697$

Tabule la función $f(x) = \tan x - 1.1x + 3.45 \quad x \in [2, 4]$

[11]:
```
f = tan(x) - 1.1*x + 3.45
x1 = 2
x2 = 4
N  = 10
h  = (x2 - x1)/N
xx = [x1 + i*h for i in range(N+1)]
[(round(i,1) , round(f.subs({x:i}),2)) for i in xx]
```

[11]: $[(2.0, \ -0.94), \ (2.2, \ -0.34), \ (2.4, \ -0.11), \ (2.6, \ -0.01), \ (2.8, \ 0.01), \ (3.0, \ 0.01), \ (3.2, \ -0.01), \ (3.4, \ -($

3.3 Simplificacion

[12]:
```
E = cos(x)**2 + sin(x)**2
Eq( E , simplify(E) )
```

[12]: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

[13]:
```
E = sin(x)*tan(x)/sec(x)
Eq( E , trigsimp(E) )
```

[13]: $\frac{\sin(x)\tan(x)}{\sec(x)} = \sin^2(x)$

3.4 Expand

[14]:
```
a,b = symbols('a b')
r = 4
E = (a+b)**r

Eq(E , expand(E))
```

[14]: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

[15]:
```
x,y = symbols('x y')

E = cos(x - y)
Eq(E, expand_trig(E))
```

[15]: $\cos(x-y) = \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y)$

3.5 Factor

[16]:
```
E = x**3 - x**2 + x - 1
Eq( E , factor(E) )
```

[16]: $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)\left(x^2+1\right)$

3.6 Cancel

[17]:
```
E = 1/(x**2 - 1) + 2/(x**2 + x - 1)
Eq( E, cancel(E) )
```

[17]:

$$\frac{2}{x^2+x-1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{3x^2+x-3}{x^4+x^3-2x^2-x+1}$$

3.7 apart

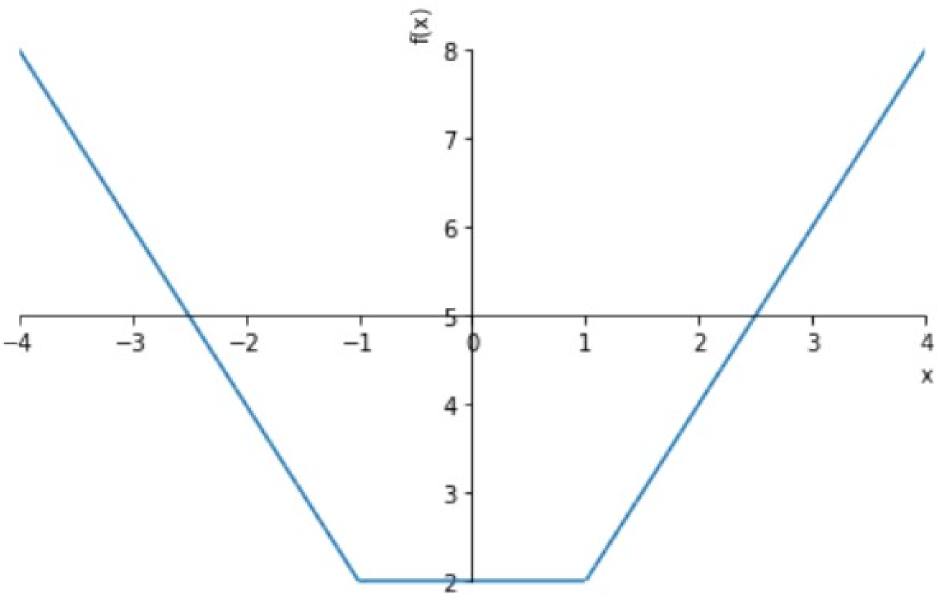
[18]:
```
E = (4*x**3 + 21*x**2 + 10*x + 12)/(x**4 + 5*x**3 + 5*x**2 + 4*x)
Eq( E, apart( E ) )
```

[18]:

$$\frac{4x^3+21x^2+10x+12}{x^4+5x^3+5x^2+4x}=\frac{2x-1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x+4}+\frac{3}{x}$$

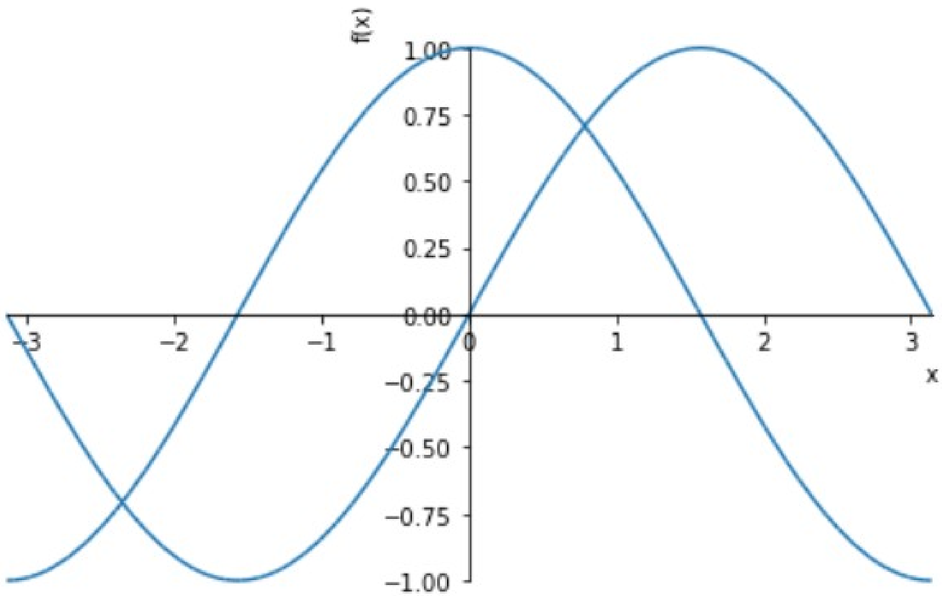
4 Trazado grafico

[19]:
```
f = abs(x+1) + abs(x-1)
plot(f,(x,-4,4))
```



[19]: `<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f267babe6d0>`

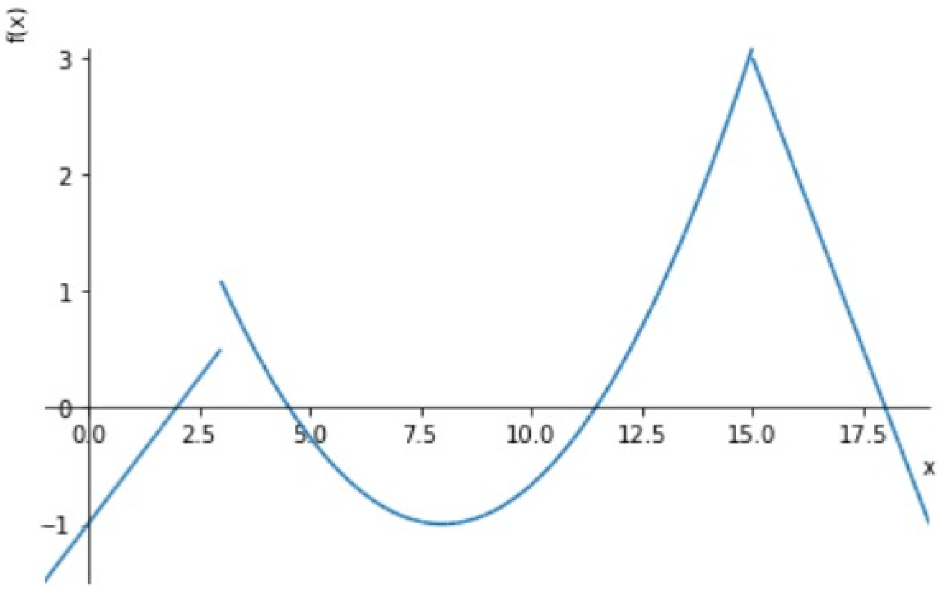
[20]:
```
plot(cos(x),sin(x),(x,-pi,pi))
```



[20]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f26798368e0>

graficar la cunción $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) & x < 3 \\ -1 + \frac{1}{12}(x-6)^2 & 3 \leq x \leq 15 \\ 18 - x & x > 15 \end{cases}$

[21]:
```
plot(((x-2)/2,(x,-1,3)) , (-1 + (x-8)**2/12,(x,3,15)) , (18-x,(x,15,19)))
```



[21]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f267985b070>

5 Ecuaciones

Resolver la ecuación $\dfrac{2y}{y-4} + \dfrac{1}{3} = 1$.

[22]:
```
solve(Eq(2*y/(y-4) + Rational(1,3) , 1), y)
```

[22]: $[-2]$

Resolver el sistema: $\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 & = 15 \\ x + y & = 1 \end{cases}$

[23]:
```
solve([5*x**2 + 3*y**2 - 15, x + y - 1] , [x,y])
```

[23]: $\left[\left(\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{105}}{8},\ \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{105}}{8}\right),\ \left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{105}}{8},\ \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{105}}{8}\right)\right]$

6 Cuestionario

1. Obtenga todas las raíces de: $x^5 = 1$
2. Obtenga el factor racionalizante de: $\sqrt[7]{x} - \sqrt[7]{y}$
3. Obtenga el valor de π con 200 dígitos.

3.Markdown

January 21, 2021

1 Párrafos, encabezados

Los párrafos es un conjunto de texto separado por una o más líneas blancas. Por defecto los párrafos no son indentados.

> Los bloque inician con el caracter `>`

Los encabezados inician con uno o mas caracteres `#`

```
# Encabezado 1
## Encabezado 2
### Encabezado 3
```

2 Resaltado

Para texto en *cursiva* encierre con `*` y para **negrita** con `**`. Tambien con `_` y `__` respectivamente.

3 Listas

Las listas con viñetas se indican con cualquiera de los caracteres `*` `+` `-`

- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$

Las listas ordenadas se indican con un numeral seguido de punto `1.`

1. π
2. e

Multilistas

1. Las soluciones complejas de $x^3 - 1 = 0 $, son:
   1. $x = 1$
   2. $x = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$
   3. $x = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

4 Enlaces

Los enlaces sigue el siguiente patron:

`[texto](http://site.com/ "titulo").`

Las imágenes:

`![texto](http://site.com/Img.png "titulo").`

Vinculos al resto de archivos locales 1. Python 1. Sympy

5 Formulas matemáticas

Fórmulas display

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

El número e

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

5.1 Fracciones

$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

5.2 Funciones trascendentes

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\sinh x + \cosh x = e^x$
5. $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

6 Cálculo

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1}{x + x^2}$
2. $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$

3. $\int_a^b f(x)\,dx$
4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

7 Sumatorios

Sea el modelo \$y = a + bx \$, los parámetros de regresión son:

$$b = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left[\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right]^2}$$

$$a = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$$

8 Desarrollos

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x^2 + \cos(x))\,dx &= \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 \cos(x)\,dx && (1)\\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + \sin(x)\right]\Bigg|_{x=1}^{2} && (2)\\
&= \frac{1}{3}x^3\Bigg|_{x=1}^{2} + \sin(x)|_{x=1}^{2} && (3)\\
&= \frac{7}{3} + \sin 2 - \sin 1 && (4)
\end{aligned}$$

9 Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \oint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}\\
&\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 && \oint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0\\
&\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} && \oint\limits_C \vec{E}\cdot d\vec{\updownarrow} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\\
&\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} && \oint\limits_C \vec{B}\cdot d\vec{\updownarrow} = \mu_0\int\limits_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S}
\end{aligned}$$

1.0_Limites

January 22, 2021

1 Límites

1.1 Punto de acumulación

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. El punto x_0 se denomina punto de acumulación del conjunto A si y sólo si, todo intervalo abierto de centro x_0 contiene por lo menos a un elemento $x \neq x_0$ del conjunto A.

$$\forall r > 0 \, \exists x \in A \, / \, 0 < |x - x_0| < r$$

2 Límites

Consideremos una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de $A = D_f$, se dice que el número real L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 $(x \to x_0)$ al cual denotaremos por:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ si y sólo si para todo número $\epsilon > 0$ existe otro número δ positivo tal que, para todo $x \in D_f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$\text{si para todo } \epsilon > 0 \text{ existe un } \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Mediante una tabulación muestre que: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

[1]:
```
f = lambda x: (x**2 - 1)/(x - 1)

xa = 0
xb = 2
N  = 20
h  = (xb - xa)/N

for i in range(N):
    xi = xa + i*h
    if (xi != 1):
```

```
        print ('%4.2f  %4.2f' % ( xi, f(xi)))
```

```
0.00  1.00
0.10  1.10
0.20  1.20
0.30  1.30
0.40  1.40
0.50  1.50
0.60  1.60
0.70  1.70
0.80  1.80
0.90  1.90
1.10  2.10
1.20  2.20
1.30  2.30
1.40  2.40
1.50  2.50
1.60  2.60
1.70  2.70
1.80  2.80
1.90  2.90
```

Se puede proporcionar un lista con valores específicos:

```
[2]: f = lambda x: (x**2 - 1)/(x - 1)

x = [0, 0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.99999, 1.00001, 1.001, 1.01, 1.1, 1.5, 2 ]

for xi in x:
    print ('%4.6f  %4.6f' % ( xi, f(xi)))
```

```
0.000000  1.000000
0.500000  1.500000
0.900000  1.900000
0.990000  1.990000
0.999000  1.999000
0.999990  1.999990
1.000010  2.000010
1.001000  2.001000
1.010000  2.010000
1.100000  2.100000
1.500000  2.500000
2.000000  3.000000
```

```
[3]: from IPython.display import HTML, display

f = lambda x: (x**2 - 1)/(x - 1)
```

```
x = [0, 0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.99999, 1.00001, 1.001, 1.01, 1.1, 1.5, 2 ]
y = []
for xi in x:
    y.append(round(f(xi),5))

data = [x, y]

display(HTML(
   '<table><tr>{}</tr></table>'.format(
       '</tr><tr>'.join(
           '<td>{}</td>'.format('</td><td>'.join(str(_) for _ in row)) for row␣
 ↪in data)
       )
))
```

```
<IPython.core.display.HTML object>
```

3 Cuestionario

Usando la definición del límite de una función y generando una tabla de valores verifique los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$
2. $\lim_{x\to -1} \frac{x^4+x^3-4x^2-x+3}{x^2-1} = -3$

1.1_Limites_calculo

January 22, 2021

0.1 Cálculo de límites

Sympy tiene la función limit para obtener el límite de una función.

`limit(exp,var,val)`

donde

- exp: es la función
- var: es el identificador de la variable
- val: el valor donde se desea calcular el ímite

Ej. Obtenga el siguiente límite: $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{7x^2 - 20x + 12}$

[1]:
```
from sympy import *

init_printing()
x = symbols('x')
```

[2]:
```
f = (3*x**2 - x - 10)/(7*x**2 - 20*x + 12)
f.subs(x,2)
```

[2]: NaN

Se observa una indeterminación de $0/0$, significa que hay un factor comun, luego de factorizar y eliminar los términos comunes, evaluamos en 2.

[3]:
```
f.simplify()
```

[3]: $\dfrac{3x + 5}{7x - 6}$

[4]:
```
_.subs(x,2)
```

[4]: $\dfrac{11}{8}$

La función limit hace todo ese proceso:

[5]:
```
Eq( Limit(f,x,2,dir="+-") , limit(f,x,2) )
```

[5]: $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{3x^2 - x - 10}{7x^2 - 20x + 12}\right) = \dfrac{11}{8}$

Función con constantes:

$$\lim_{x \to m} \frac{x^2 - (m-1)x - m}{x^2 - (m-2)x - 2m}$$

[6]:
```
m = symbols('m')
f = (x**2 - (m-1)*x - m)/(x**2 - (m-2)*x - 2*m)
f
```

[6]:

$$\frac{-m + x^2 - x(m-1)}{-2m + x^2 - x(m-2)}$$

[7]:
```
limit(f,x,m)
```

[7]:

$$\frac{m+1}{m+2}$$

Funciones con radicales:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x - 1}$$

[8]:
```
f = (sqrt(x**2 + 3) - 2)/(x - 1)
f.subs(x,1)
```

[8]:

NaN

para salvar la indeterminación, multiplicamos por el factor racionalizante

[9]:
```
fr = sqrt(x**2 + 3) + 2
expand( numer(f)*fr ) / (denom(f)*fr)
```

[9]:

$$\frac{x^2 - 1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3} + 2\right)}$$

[10]:
```
_.simplify()
```

[10]:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3} + 2}$$

[11]:
```
_.subs(x,1)
```

[11]:

$$\frac{1}{2}$$

[12]:
```
a = 1
Eq( Limit(f,x,a,dir="+-") , limit(f,x,a) )
```

[12]:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x - 1}\right) = \frac{1}{2}$$

Con más radicales:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+13}}{x-1}$$

[13]:
```
f = (sqrt(x) + sqrt(4*x+5) - sqrt(3*x+13))/(x-1)
a = 1
Eq( Limit(f,x,a,dir="+-") , limit(f,x,a) )
```

[13]:
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3x+13}+\sqrt{4x+5}}{x-1}\right)=\frac{19}{24}$$

1 Cuestionario

1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^3-3x^2+4x-39}{4x^2+3x+7}$
2. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x^2+7x+5}{x^2-16}$
3. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^2+3x-6}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\frac{2}{3x-6}-\frac{2}{2x^2-5x+2}\right]$
5. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x+5}}{1-\sqrt{5-x}}$
6. $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{5x-2}-\sqrt[3]{x+6}}{x^2-4}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+8}-\sqrt{x^2+4}}{x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{x-1}$
11. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}-\sqrt{12x+13}}{x-1}$
12. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}$
13. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+13}-\sqrt{x}-\sqrt{4x+5}}$

1.2_Limites_laterales

January 22, 2021

1 Limites laterales

Para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$, depende del comportamiento de la función $f(x)$ cuando x tiende hacia a, tanto para valores de x menores que a (por la izquierda de a), como para los valores de x mayores que a (por la derecha de a).

Al límite de la función $f(x)$, cuando x se aproxima hacia a por la izquierda es el número l_1 que denotaremos por: $\lim_{x \to a^-} f(x) = l_1$

Al límite de la función $f(x)$, cuando x se aproxima hacia a por la derecha es el número l_2 que denotaremos por: $\lim_{x \to a^+} f(x) = l_2$

1.1 Límite por la izquierda

Sea la función f definida en el intervalo $\langle c, a \rangle$; el límite de la función $f(x)$ cuando x se aproxima hacia a por la izquierda, es el número real l_1 la cual denotaremos por $\lim_{x \to a^-} f(x) = l_1$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si: $a - \delta < x < a$ entonces $|f(x) - l_1| < \epsilon$

Es decir:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l_1$$

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \ / \ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon$$

1.2 Límite por la derecha

Sea la función f definida en el intervalo $\langle a, d \rangle$; el límite de la función $f(x)$ cuando x se aproxima hacia a por la derecha, es el número real l_2 la cual denotaremos por $\lim_{x \to a^+} f(x) = l_2$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si: $a < x < a + \delta$ entonces $|f(x) - l_2| < \epsilon$

Es decir:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l_2$$

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \ / \ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon$$

1.3 Existencia del límite

Para que existe el límite de una función debe cumplirse la condición siguiente.

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow l_1 = \lim_{x \to a^-} f(x) = l_2 = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

No existe $\lim_{x \to a} f(x)$ en los siguientes casos:

- Cuando no existan uno de los límites laterales.
- Cuando los límites laterales existen y son diferentes.

Cuando la función $f(x)$ tiene diferentes reglas de correspondencia (definida por tramos) se aplica el criterio de los límites laterales.

[1]:
```
from sympy import *

x = symbols('x')
init_printing()
```

1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & , x \leq 1 \\ 2ax - b & , 1 < x \leq 2 \\ x + 1 & , x > 2 \end{cases}$.

Determinar los valores de a y de b para que existan los límites de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

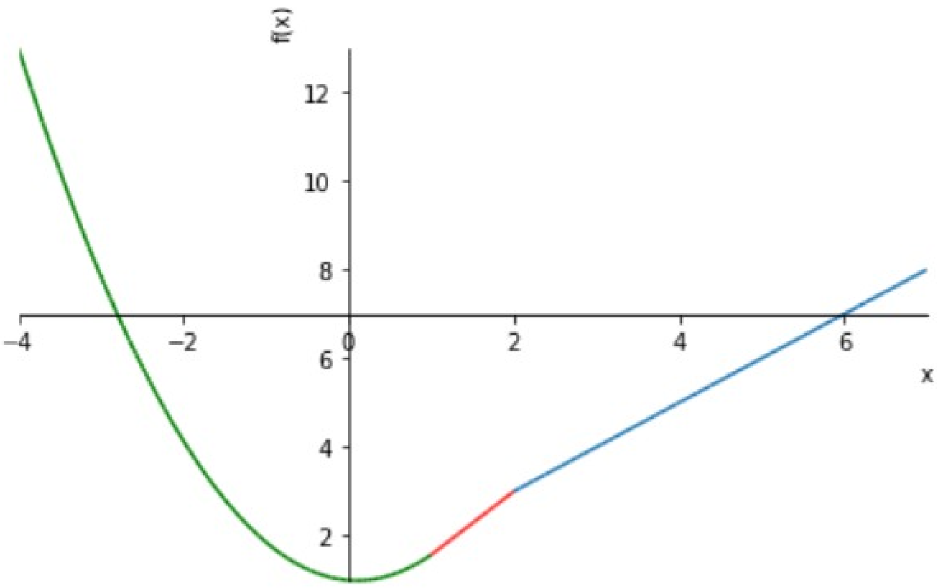
Como primer paso definimos las constantes simbólicas y los tramos de las funciones:

[2]:
```
a,b = symbols('a,b')
f1 = lambda x: a*(x**2) + b*x + 1
f2 = lambda x: 2*a*x - b
f3 = lambda x: x + 1
```

[3]:
```
l1 = 1
l2 = 2
S = solve( {Eq( f1(l1) , f2(l1) ) , Eq( f2(l2) , f3(l2) )} , {a,b})
S
```

[3]: $\left\{a : \frac{5}{7},\ b : -\frac{1}{7}\right\}$

[4]:
```
F1 = lambda x: f1(x).subs(S)
F2 = lambda x: f2(x).subs(S)
P = plot((F1(x),(x,l1-5,l1)),(F2(x),(x,l1,l2)),(f3(x),(x,l2,l2+5)),show=False)
P[0].line_color = 'green'
P[1].line_color = 'red'
P.show()
```



2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & , x \leq -2 \\ 2ax-b & , -2 < x \leq 2 \\ -ax^2+bx+1 & , x > 2 \end{cases}$.

Determinar los valores de a y de b para que existan los límites de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

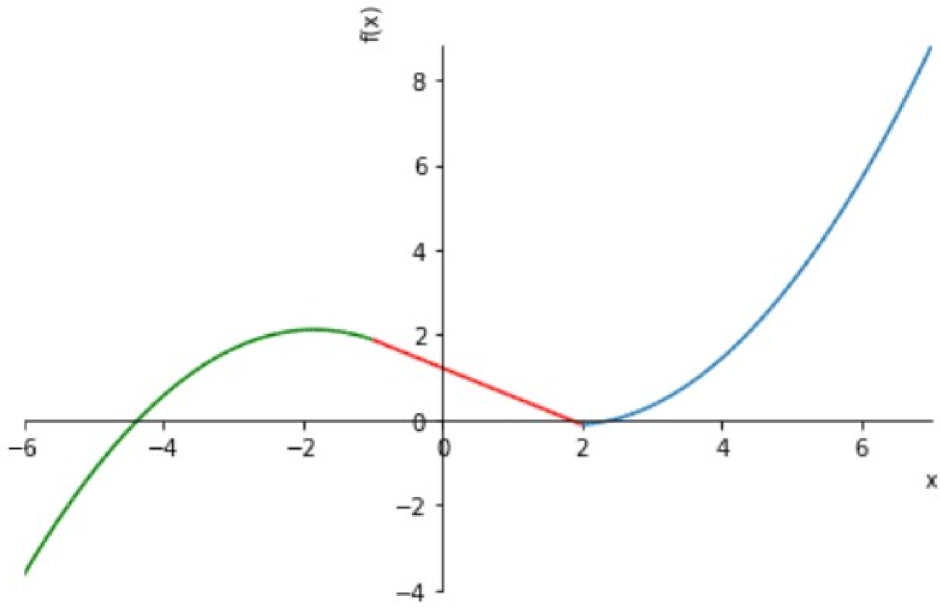
[5]:
```
a,b = symbols('a,b')
f1 = lambda x: a*(x**2) + b*x + 1
f2 = lambda x: 2*a*x - b
f3 = lambda x: -a*(x**2) + b*x + 1
```

[6]:
```
l1 = -1
l2 = 2
S = solve( {Eq( f1(l1) , f2(l1) ) , Eq( f2(l2) , f3(l2) )} , {a,b})
S
```

[6]: $\left\{a : -\frac{1}{3},\ b : -\frac{11}{9}\right\}$

[7]:
```
F1 = lambda x: f1(x).subs(S)
F2 = lambda x: f2(x).subs(S)
F3 = lambda x: f3(x).subs(S)
P = plot((F1(x),(x,l1-5,l1)),(F2(x),(x,l1,l2)),(F3(x),(x,l2,l2+5)),show=False)
```

```
P[0].line_color = 'green'
P[1].line_color = 'red'
P.show()
```



3. Determinar el límite: $\lim_{x\to 1} \frac{\lfloor x^2 \rfloor - 1}{x+1}$

[8]:
```
f = (floor(x**2) - 1)/(x + 1)
f
```

[8]: $\frac{\lfloor x^2 \rfloor - 1}{x+1}$

[9]:
```
limit(f,x,1,dir="-") , limit(f,x,1,dir="+")
```

[9]: $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$

Como los límites laterales son distintos, el límite en $x = 1$ no existe.

4. Determinar el límite: $\lim_{x\to \frac{5}{2}} \sqrt{|x| + \lfloor 3x \rfloor}$

[10]:
```
f = sqrt(abs(x) + floor(3*x))
limit(f,x,Rational(5,2),dir="-") , limit(f,x,Rational(5,2),dir="+")
```

[10]:

$$\left(\frac{\sqrt{38}}{2}, \frac{\sqrt{38}}{2}\right)$$

5. Determinar el límite: $\lim_{x \to \frac{1}{6}} \frac{12 - \lfloor \frac{x}{3} \rfloor}{\lfloor 3x \rfloor - 10}$

[11]:
```
f = (12 - floor(x/3)) / (floor(3*x) - 10)
limit(f,x,Rational(1,6),dir="-") , limit(f,x,Rational(1,6),dir="+")
```

[11]: $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

2 Cuestionario

Determinar los siguientes límites

1. si $f(x) = \lfloor x \rfloor - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$. determinar $\lim_{x \to n} f(x)$
2. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{a}\right) \lfloor \frac{b}{x} \rfloor$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

1.3_Limites_infinitos

January 22, 2021

1 Límites infinitos

Sea la función f definida en el intervalo I que contiene al punto a excepto en a. Cuando la variable x tiende hacia a la función $f(x)$ crece sin límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$
$$\forall\, N > 0, \exists\, \delta > 0 \;/\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$$

Sea la función f definida en el intervalo I que contiene al punto a excepto en a. Cuando la variable x tiende hacia a la función $f(x)$ decrece sin límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$$\forall\, N < 0, \exists\, \delta > 0 \;/\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < N$$

1.0.1 Teorema

Sea n es un número entero positivo cualquiera, se cumple:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty, & \text{si n es impar} \\ +\infty, & \text{si n es par} \end{cases}$$

$$1)\, \frac{a}{0} = +\infty, \quad a > 0 \qquad 2)\, \frac{a}{0} = -\infty, \quad a < 0 \qquad 3)\, \frac{0}{a} = 0, \quad a \neq 0$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = c$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, donde $a \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, entonces:

- Si $c > 0$ y $g(x) \to 0$, para valores positivos de $g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
- Si $c > 0$ y $g(x) \to 0$, para valores negativos de $g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
- Si $c < 0$ y $g(x) \to 0$, para valores positivos de $g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
- Si $c < 0$ y $g(x) \to 0$, para valores negativos de $g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

[1]:
```
from sympy import *

x = symbols('x', real=True)
init_printing()
```

1.1 Derminar los limites infinitos:

1. $f(x) = \dfrac{x-6}{\sqrt{x^2-4}}$

[2]:
```
f = (x-6)/sqrt(x**2 - 4)
f
```

[2]:
$$\frac{x-6}{\sqrt{x^2-4}}$$

La función tiene el siguiente dominio:

[3]:
```
solve(x**2 - 4 >=0 ,x)
```

[3]:
$$2 \leq x \vee x \leq -2$$

Por tanto solo son posibles los siguiente limites infinitos

[4]:
```
limit(f, x, -2, dir="-") , limit(f, x, 2, dir="+")
```

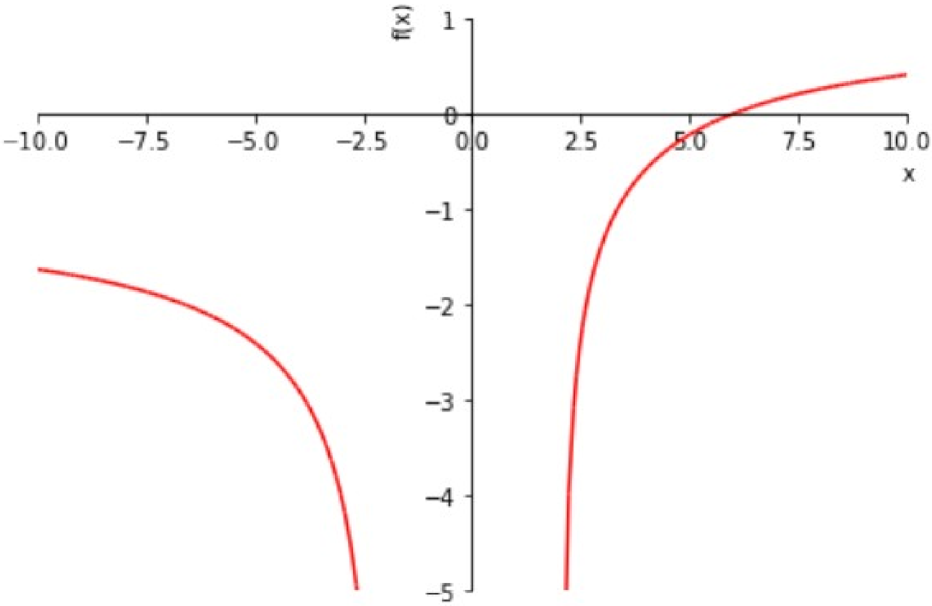
[4]:
$$(-\infty, \ -\infty)$$

Adicionalmente tiene las siguientes asíntotas horizontales:

[5]:
```
limit(f, x, -oo) , limit(f, x, +oo)
```

[5]:
$$(-1, \ 1)$$

[6]:
```
plot((f, (x,-10,-1.9)),(f, (x,2.1,10)) , ylim=(-5,1), line_color="red")
```




```
[6]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fb06c98a8b0>
```

2 Cuestionario

1. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x^2-4}$
2. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{5x^3+1}{2-x-x^2}$
3. $\lim_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$
4. $\lim_{x\to 4^-} \dfrac{\lfloor x \rfloor - 4}{x-4}$
5. $\lim_{x\to 4} \dfrac{|16-x^2|+1}{(4-x)\sqrt{5-|x+1|}}$
6. $\lim_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x^2-4}\right]$

1.4_Limites_al_infinito

January 22, 2021

1 Límites al infinito

Sea la función $f : \langle a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, el límite de la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es el número real L y lo denotaremos por $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N > 0$ tal que si $x > N$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$, es decir:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\,\epsilon > 0, \exists N > 0 \;/\; x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Sea la función $f : \langle -\infty, b\rangle \to \mathbb{R}$, el límite de la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es el número real L y lo denotaremos por $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $M < 0$ tal que si $x < M$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$, es decir:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\,\epsilon > 0, \exists M < 0 \;/\; x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

1.0.1 Teorema

Sea n un número entero positivo cualquiera, se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

[1]:
```
from sympy import *

init_printing()
x = symbols('x', real=True)
```

1.1 Determine los límites

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+7}$

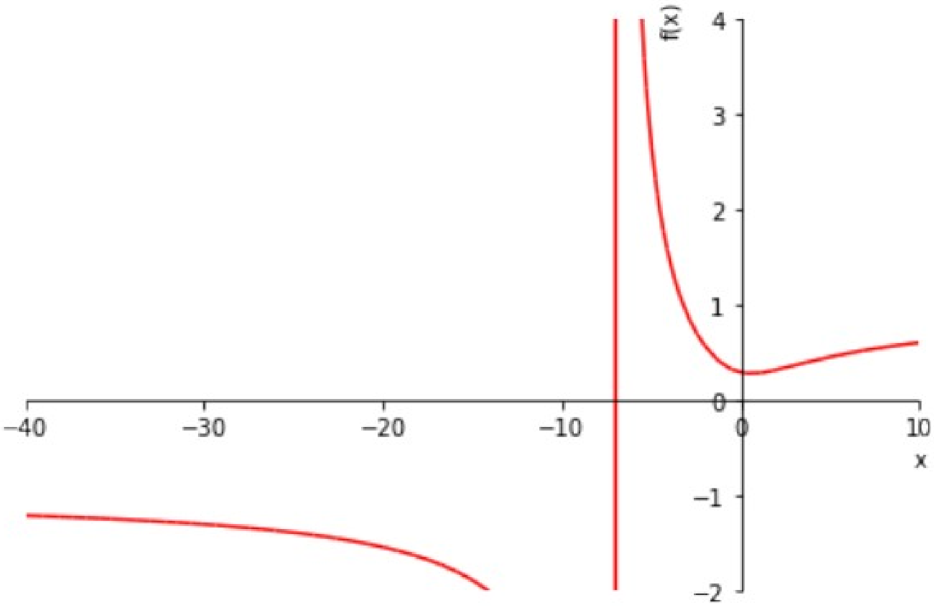
[2]:
```
f = sqrt(x**2 + 4)/(x+7)
f
```

[2]: $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+7}$

[3]:
```
limit(f,x,-oo) , limit(f,x,oo)
```

[3]: $(-1, \ 1)$

[4]:
```
plotting.plot(f , (x,-40,10), ylim=(-2,4), line_color="red")
```



[4]: `<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fec956d0c10>`

2. Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + x$. Determine los límites si la variable crece y decrece indefinidadmente.

[5]:
```
f = sqrt(x**2 - 2*x + 4) + x
f
```

[5]: $x + \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

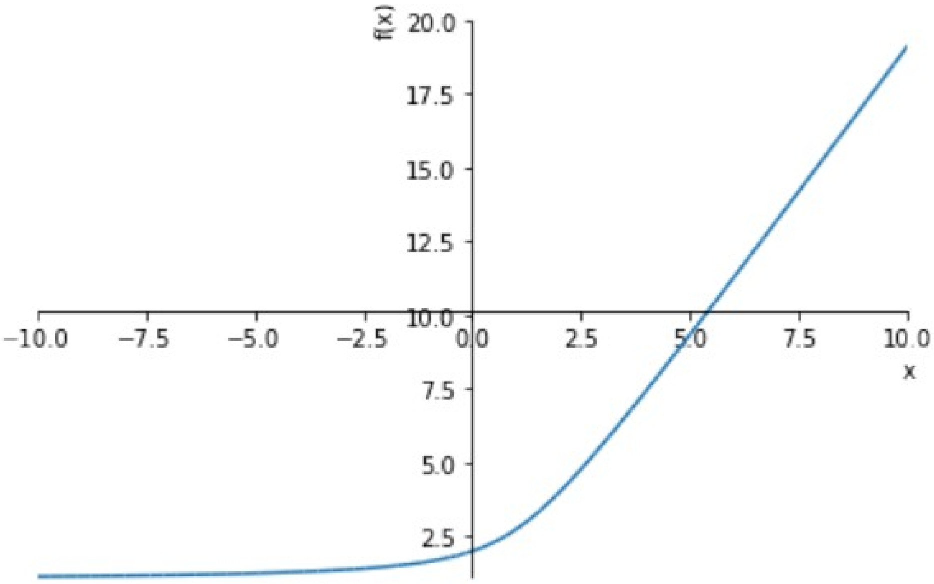
[6]:
```
limit(f,x,+oo)
```

[6]: ∞

[7]:
```
limit(f,x,-oo)
```

[7]: 1

[8]:
```
plotting.plot(f)
```



[8]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fec7d72ff40>

2 Cuestionario

Determine los siguientes límites

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2+2} - \dfrac{x^2}{x+2}\right]$
3. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x+3}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-5x+6} - x$

1.5_Limites_trigonometricos

January 22, 2021

1 Límites trigonométricos

Tenemos los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
3. $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$
4. $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$

[1]:
```
from sympy import *

init_printing()
x,m,n = symbols('x m n')
```

1.1 Determinar los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

[2]:
```
f = sin(5*x)/x
a = 0
Eq( Limit(f,x,a,"+-") , limit(f,x,a))
```

[2]:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin(5x)}{x}\right) = 5$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6x - \sin 2x}{2x + 3\sin 4x}$

[3]:
```
f = (6*x - sin(2*x))/(2*x + 3*sin(4*x))
a = 0
Eq( Limit(f,x,a,"+-") , limit(f,x,a))
```

[3]:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{6x - \sin(2x)}{2x + 3\sin(4x)}\right) = \frac{2}{7}$$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

[4]:
```
f = (1 - cos(x))/x
a = 0
Eq( Limit(f,x,a,"+-") , limit(f,x,a))
```

[4]:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) = 0$$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

[5]:
```
f = (1 - cos(x))/x**2
a = 0
Eq( Limit(f,x,a,"+-") , limit(f,x,a))
```

[5]:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

[6]:
```
f = (cos(m*x) - cos(n*x))/x**2
a = 0
Eq( Limit(f,x,a,"+-") , limit(f,x,a))
```

[6]:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}\right) = -\frac{m^2}{2} + \frac{n^2}{2}$$

1.2 Cuestionario

Determinar los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{x}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{6x - \sin 2x}{2x + 3\sin 4x}$
3. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$
4. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

1.6_Limites_trascendentes

January 22, 2021

1 Limites trascendentes

Un límite clásico

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

[1]:
```
from sympy import *

init_printing()
x,a = symbols('x a', real=True)
```

1.1 Determinar los límites

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^{x-2}$

[2]:
```
f = ((x - 4)/(x + 1))**(x-2)
f
```

[2]: $\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^{x-2}$

[3]:
```
limit(f,x,+oo)
```

[3]: e^{-5}

2. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+4x}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$

[4]:
```
f = ((x**2+3)/(x**2+4*x))**((x**2-1)/(x))
f
```

[4]: $\left(\frac{x^2+3}{x^2+4x}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$

[5]:
```
limit(f, x, +oo)
```

[5]: e^{-4}

3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - a^x}{\sin x}$

[6]:
```
f = (1 - a**x)/(sin(x))
f
```

[6]: $\frac{1 - a^x}{\sin(x)}$

[7]:
```
limit(f,x,0)
```

[7]: $-\log(a)$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{a^{-x} - 1}{x}$

[8]:
```
f = (a**(-x) - 1)/x
f
```

[8]: $\frac{-1 + a^{-x}}{x}$

[9]:
```
limit(f,x,0)
```

[9]: $-\log(a)$

1.2 Cuestionario

Determinar los límites

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{x}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{7^x - 5^x}{x}$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{9^x - 7^x}{8^x - 6^x}$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) - \sin(x)}{\ln(1 + x)}$

2.0_Derivada

January 23, 2021

1 Derivada

1.0.1 Definición

Sea la función real de variable real $y = f(x)$, si $x \in D_f$ entonces la derivada de la función f con respecto a x es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Siempre que dicho límite exista.

El proceso de encontrar la derivada se llama *diferenciación*.

Si f es una función que depende de los valores de la variable independiente x entonces a la derivada de f denotaremos por:

$$y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = D_x f$$

La interpretación geométrica de la derivada de la función $f(x)$, es la pendiente de la recta tangente.

La derivada de una función $f(x)$ en un punto particular x_0 es:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

O también:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1.0.2 Definición

La función real de variable real $y = f(x)$ es diferenciable en el punto $x = x_0$ si existe su derivada en dicho punto, es decir si $f'(x)$ existe.

Diremos que la función f es diferenciable en un intervalo $[a, b]$ si la función f es diferenciable en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

La recta tangente a $f(x) $ en $ (x_0,f(x_0))$ es:

$$\mathcal{L}_T : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

1.1 Derivadas laterales

Consideremos una función real de variable real, $y = f(x)$, entones:

1.1.1 Derivada por la derecha

La derivada de la función f en el punto $x=x_0 , por la derecha representamos por $f'(x_0^+)$ y está definido por:

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

O equivalente a la forma:

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si el límite existe.

1.1.2 Derivada por la izquierda

La derivada de la función f en el punto $x = x_0$, por la izquierda representamos por $f'(x_0^-)$ y está definido por:

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

O equivalente a la forma:

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si el límite existe.

La derivada de la función $f(x)$ existe en un punto x_0, si sus derivadas laterales existen y son iguales:

$$\exists\, f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

[1]:
```
from sympy import *

init_printing()
x,h = symbols('x h', real=True)
```

1. Cálcule la derivada de la función $f(x) = 4 - x^2$, usando la definición de la derivada.

[2]:
```
f = lambda x: 4 - x**2

cD = (f(x+h) - f(x))/h
cD , limit(cD, h, 0)
```

[2]:
$$\left(\frac{x^2 - (h+x)^2}{h}, \ -2x \right)$$

El módulo sympy tiene la función *diff* que realiza el cálculo de la derivada.

[3]:
```
diff(f(x),x)
```

[3]: $-2x$

2. Demuestre que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ es diferenciable en $x = 0$, encuentre $f'(0)$.

[4]:
```
def f(x):
    if x != 0 : return x**2*sin(1/x)
    else : return 0

f(x) , f(0) , f(1)
```

[4]: $\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0,\ 0.841470984807897\right)$

Obtendremos las derivadas laterales en $x = 0$

[5]:
```
x0 = 0
cD = (f(x) - f(x0))/(x - x0)

cD , limit(cD,x,0,dir='+') , limit(cD,x,0,dir='-')
```

[5]: $\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0,\ 0\right)$

[6]:
```
x0 = 0
cD = (f(x0 + h) - f(x0))/h

cD , limit(cD,h,0,dir='+') , limit(cD,h,0,dir='-')
```

[6]: $\left(h \sin\left(\frac{1}{h}\right),\ 0,\ 0\right)$

1.2 Reglas de derivación

- La derivada de una constante. Si $y = f(x) = c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$
- La derivada de la función identidad. Si $y = f(x) = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$
- La derivada de la función potencia. Si $y = f(x) = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$
- La derivada del producto de una función por un escalar. Si $y = kf(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = kf'(x)$
- La derivada de la suma de dos funciones. Si $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$
- La derivada del producto de dos funciones. Si $y = f(x)g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- La derivada del cociente de dos funciones. Si $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, $g(x) \neq 0$

1. Verificar las reglas de derifación

[7]:
```
f = Function('f')
g = Function('g')
k,x = symbols('k x', real=True)
n = symbols('n', real=True)
```

[8]:
```
diff(k*f(x),x) , diff(f(x) + g(x),x)
```

[8]:
$$\left(k\frac{d}{dx}f(x),\ \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)\right)$$

[9]:
```
diff(f(x)*g(x),x) , diff(f(x)/g(x),x)
```

[9]:
$$\left(f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x),\ -\frac{f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g^2(x)}+\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{g(x)}\right)$$

[10]:
```
diff(x**n,x) , diff(sqrt(x),x)
```

[10]:
$$\left(\frac{nx^n}{x},\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

2. Determinar las derivadas de la función. $f(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x^2-2}\sqrt{x+4}$

[11]:
```
F = sqrt(x+1)*sqrt(x**2-2)*sqrt(x+4)
F
```

[11]:
$$\sqrt{x+1}\sqrt{x+4}\sqrt{x^2-2}$$

[12]:
```
diff(F).simplify()
```

[12]:
$$\frac{4x^3+15x^2+4x-10}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x+4}\sqrt{x^2-2}}$$

2 Regla de la cadena

Consideremos dos funciones diferenciables:

$$\begin{cases} y=f(u) & y \text{ es función de } u \\ u=g(x) & u \text{ es función de } x \end{cases}$$

Entonces y se puede expresar en función de x.

$$y=f(u)=f[g(x)]=(f\circ g)(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=f'[g(x)]g'(x)$$

Para tres funciones:

$$(f\circ g\circ h)(x)=f'[g(h(x))]g'(h(x))h'(x)$$

2.0.1 Derivada de: $y = f(x)^n$

$$y = u^n \Rightarrow \frac{dy}{du} = nu^{n-1}$$

$$u = f(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = nf(x)^{n-1}f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)^n] = nf(x)^{n-1}f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

3 Derivada de la función exponencial

Sea la función: $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Sea la función: $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$$

- $\frac{d}{dx}[a^u] = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \frac{du}{dx}$

4 Derivada de la función logarítmica

Sea la función: $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln[x+h] - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \ln \left[1 + \frac{h}{x}\right]^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{x}$$

Sea la función: $f(x) = \log_a x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right] = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x \ln a}$$

- $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}$

5 Derivada de las funciones trigonométricas

Si $u = u(x)$

$$\frac{d}{dx}[\sin u] = \cos u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}[\cos u] = -\sin u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}[\tan u] = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}[\cot u] = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}[\csc u] = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

Verificaremos la derivada de la función seno y coseno.

[13]:
```
x,h = symbols('x h', real=True)

f = lambda x: sin(x)
cD = (f(x+h) - f(x))/h
cD , limit(cD,h,0)
```

[13]: $\left(\frac{-\sin(x) + \sin(h+x)}{h}, \ \cos(x) \right)$

[14]:
```
x,h = symbols('x h', real=True)

f = lambda x: cos(x)
cD = (f(x+h) - f(x))/h
cD , limit(cD,h,0)
```

[14]: $\left(\frac{-\cos(x) + \cos(h+x)}{h}, \ -\sin(x) \right)$

6 Cuestionario

1. Obtenga la regla para la derivada de: $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.
2. Obtenga la regla para la derivada de: $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)]$.
3. Obtenga la regla para la derivada de: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)g(x)}{h(x)}\right]$.

2.1_Derivada_implicita

January 23, 2021

1 Derivada de la función implícita

Una función implícita es aquella que se expresa por la ecuación $F(x, y) = 0$. Para derivar:

- Se deriva cada termino de la ecuacion respecto a la variable independiente. Considerando las reglas de derivación y la regla de la cadena. En este proceso la derivada de la variable dependiente se queda indicada y'
- Se factoriza el termino y' para posteriormente despejarla de la ecuacion resultante.
- En ocasiones se utiliza la ecuación original para determinar la respuesta.

Determinar las derivadas implicitas de:

1. $x^2 + y^2 = 1$

[1]:
```python
from sympy import *

x = Symbol('x')
y = Function('y')

init_printing()
```

[2]:
```python
E = Eq(x**2 + y(x)**2 , 1)
E
```

[2]: $x^2 + y^2(x) = 1$

[3]:
```python
Eq( diff(E.lhs,x) , diff(E.rhs) )
```

[3]: $$2x + 2y(x)\frac{d}{dx}y(x) = 0$$

[4]:
```python
solve(_, diff(y(x),x))
```

[4]: $$\left[-\frac{x}{y(x)}\right]$$

2. Determinar la derivada de: $\dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^3} = \dfrac{1}{3}$

[5]:
```python
E = Eq(x**3/y(x)**2 + y(x)**2/x**3 , Rational(1,3))
E
```

[5]: $\frac{x^3}{y^2(x)} + \frac{y^2(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$

[6]:
```
Eq( diff(E.lhs,x) , diff(E.rhs) )
```

[6]: $-\frac{2x^3\frac{d}{dx}y(x)}{y^3(x)} + \frac{3x^2}{y^2(x)} + \frac{2y(x)\frac{d}{dx}y(x)}{x^3} - \frac{3y^2(x)}{x^4} = 0$

[7]:
```
solve(_, diff(y(x),x))
```

[7]: $\left[\frac{3y(x)}{2x}\right]$

3. Derivar: $\sin xy + \cos xy = \tan(x+y)$

[8]:
```
E = Eq( sin(x*y(x)) + cos(x*y(x)) , tan(x + y(x)) )
E
```

[8]: $\sin(xy(x)) + \cos(xy(x)) = \tan(x + y(x))$

[9]:
```
Eq( diff(E.lhs,x) , diff(E.rhs) )
```

[9]: $-\left(x\frac{d}{dx}y(x) + y(x)\right)\sin(xy(x)) + \left(x\frac{d}{dx}y(x) + y(x)\right)\cos(xy(x)) = (\tan^2(x + y(x)) + 1)\left(\frac{d}{dx}y(x) + 1\right)$

[10]:
```
solve(_, diff(y(x),x))
```

[10]: $\left[\frac{-y(x)\sin(xy(x)) + y(x)\cos(xy(x)) - \tan^2(x + y(x)) - 1}{x\sin(xy(x)) - x\cos(xy(x)) + \tan^2(x + y(x)) + 1}\right]$

4. Derivar: $xy = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

[11]:
```
E = Eq(x*y(x) , atan(x/y(x)))
solve( Eq( diff(E.lhs,x) , diff(E.rhs) ) , diff(y(x),x))
```

[11]: $\left[\frac{(-x^2 - y^2(x) + 1)\,y(x)}{x\,(x^2 + y^2(x) + 1)}\right]$

4. Determinar y' de la función implicita: $e^y = (y+1)e^x$

[13]:
```
x = symbols('x', real=True)
y = Function('y')(x)
```

[14]:
```
E = Eq(exp(y) , (y+1)*exp(x))
E
```

[14]: $e^{y(x)} = (y(x) + 1)\,e^x$

[15]:
```
Eq( diff(E.lhs) , diff(E.rhs) )
```

[15]:

$$e^{y(x)}\frac{d}{dx}y(x) = (y(x)+1)\,e^x + e^x\frac{d}{dx}y(x)$$

[16]:
```
solve(_, diff(y))
```

[16]:

$$\left[-\frac{(y(x)+1)\,e^x}{e^x - e^{y(x)}}\right]$$

1.1 Derivada de la función de la forma $y = f(x)^{g(x)}$

Primero se toma el logaritmo en ambos miembros de la ecuación:

$$\ln(y) = g(x)\ln(f(x))$$

Derivando implicitamente, y despejando y':

$$y' = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln[f(x)] + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Determinar y' de la función implicita: $x^y = y^x$

[17]:
```
E = Eq(x**y , y**x)
Eq( log(E.lhs).diff() , log(E.rhs).diff() )
```

[17]:

$$\log(x)\frac{d}{dx}y(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{x\frac{d}{dx}y(x)}{y(x)} + \log(y(x))$$

[18]:
```
solve(_, diff(y))[0].factor()
```

[18]:

$$-\frac{(x\log(y(x)) - y(x))\,y(x)}{x\,(x - y(x)\log(x))}$$

2 Cuestionario

Obtenga las derivadas de las siguientes funciones implicitas:

1. $x^4 + y^4 = x^2y^2$
2. $\frac{x^3}{y^2} + \frac{y^2}{x^3} = \frac{1}{3}$
3. $\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{y}$

2.2_Derivadas_de_orden_superior

January 23, 2021

1 Derivadas de orden superior

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en x, entonces:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si f' es derivable, obtenemos la segunda dervada de f:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Si f'' es derivable, obtenemos la tercera dervada de f:

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$$

De esta manera la n-ésima devada de f es:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

En otra notación:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]$$

[1]:
```
from sympy import *
init_printing()
```

1. Demostrar que la función $y = Ax^n + Bx^{1-n}$. Satisface la ecuación diferencial: $n(n-1)y - x^2y'' = 0$

[2]:
```
A,B,n,x = symbols('A B n x', real=True)

y = A*x**n + B*x**(1-n)

x**2*diff(y,x,2) - n*(n-1)*y
```

[2]: $An^2x^n - Anx^n + Bx^{1-n}(n-1)^2 + Bx^{1-n}(n-1) - n(n-1)\left(Ax^n + Bx^{1-n}\right)$

[3]:
```
_.simplify()
```

[3]: 0

2. Si $f(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$, Determinar los valores de A, B tal que se cumple la ecuación diferencial: $f''(x) + 4f'(x) + 3f(x) = 10\cos(3x)$

[4]:
```
f = A*sin(3*x) + B*cos(3*x)
diff(f,x,2) + 4*diff(f,x) + 3*f
```

[4]: $3A\sin(3x) + 12A\cos(3x) - 12B\sin(3x) + 3B\cos(3x) - 9(A\sin(3x) + B\cos(3x))$

[5]:
```
Eq(collect(_,[sin(3*x),cos(3*x)]) , 10*cos(3*x) )
```

[5]: $(-6A - 12B)\sin(3x) + (12A - 6B)\cos(3x) = 10\cos(3x)$

Comparando las funciones linealmente independientes, generamos dos ecuaciones:

[6]:
```
solve([Eq(-6*A - 12*B , 0) , Eq(12*A - 6*B ,10)],[A,B] )
```

[6]: $\left\{A : \frac{2}{3},\ B : -\frac{1}{3}\right\}$

3. Si $x = t^2 - t$, $y = t^3 + 1$. Determinar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.

[7]:
```
t = symbols('t')
x = t**2 - t
y = t**3 + 1
```

[8]:
```
dydx = diff(y,t) / diff(x,t)
dydx
```

[8]: $\frac{3t^2}{2t-1}$

[9]:
```
diff(_,t)/diff(x,t)
```

[9]: $\frac{-\frac{6t^2}{(2t-1)^2} + \frac{6t}{2t-1}}{2t-1}$

[10]:
```
_.factor()
```

[10]: $\frac{6t(t-1)}{(2t-1)^3}$

4. Si $f(x) = \frac{1}{A-x}$. Determinar $f^{(n)}(x)$.

[11]:
```
x,A = symbols('x A')
f = 1/(A - x)
```

[12]:
```
diff(f,x)
```

[12]:
$$\frac{1}{(A-x)^2}$$

[13]:
```
diff(f,x,2)
```

[13]:
$$\frac{2}{(A-x)^3}$$

[14]:
```
diff(f,x,3)
```

[14]:
$$\frac{6}{(A-x)^4}$$

[15]:
```
diff(f,x,4)
```

[15]:
$$\frac{24}{(A-x)^5}$$

$\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{A-x}\right]=\frac{n!}{(A-x)^{n+1}}$. Similarmente $\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{A+x}\right]=\frac{(-1)^n n!}{(A+x)^{n+1}}$

5. Si $f(x)=\frac{5x-2}{x^2-4}$. Determinar $f^{(n)}(x)$

[16]:
```
f = (5*x - 2)/(x**2 - 4)
f
```

[16]:
$$\frac{5x-2}{x^2-4}$$

[17]:
```
_.apart()
```

[17]:
$$\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2}$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{3(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}+\frac{2n!}{(x-2)^{n+1}}$$

2 Cuestionario

1. Si $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. Determinar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.
2. Si $x=\ln(1+t^2)$, $y=t^2$. Determinar $\frac{d^2y}{dx^2}$, cuando $t=1$.
3. Si $f(x)=\frac{1}{A+x}$. Determinar $f^{(n)}(x)$.
4. Si $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-7x+6}$. Determinar $f^{(n)}(x)$

2.3_Tangentes

January 23, 2021

1 Rectas tangentes

Sea la función $y = f(x)$ entonces la pendiente de su recta tangente en en $x_0 \in D_f$ es $f'(x_0)$.

La recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0)$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

La recta normal en el punto $(x_0, f(x_0)$ es:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

[1]:
```
from sympy import *

init_printing()
```

1. Obtener las ecuaciones de las rectas tangentes y normal a la curva $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ en el punto (2,1).

[2]:
```
x = Symbol('x', real=True)
y = Function('y')

P = (2,1)
F = 2*x**3 + 2*y(x)**3 - 9*x*y(x)
dF= solve( diff(F,x) , diff(y(x),x) )[0]
m = dF.subs(x,P[0]).subs(y(P[0]),P[1])

y = Symbol('y', real=True)
Eq( y - P[1]   ,   m*(x - P[0]) )
```

[2]:

$$y - 1 = \frac{5x}{4} - \frac{5}{2}$$

[3]:
```
x = symbols('x', real=True)
y = Function('y')

x0 = 1
y0 = sqrt(6)/2 - 1
```

```
F = 2*x**3 + 2*y(x)**3 - 9*x*y(x)
dF= solve( diff(F,x)  , diff(y(x),x) )[0]
m = dF.subs(x,x0).subs(y(x0),y0)
#m = expand( numer(factor(m)) * (sqrt(6) + 1))/expand( denom(factor(m)) *␣
↪(sqrt(6) + 1))
m = m.radsimp()
y = Symbol('y', real=True)
Eq( y    ,  m*(x - y0) + x0)
```

[3]:

$$y = \frac{\left(-8 + 7\sqrt{6}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)}{20} + 1$$

[4]:

```
expand(_.rhs)
```

[4]:

$$-\frac{2x}{5} + \frac{7\sqrt{6}x}{20} - \frac{9}{20} + \frac{11\sqrt{6}}{20}$$

2. Hallar la ecuación de la tangente a la estrofoide $y = -x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. En el punto $(-\frac{3a}{5}, \frac{6a}{5})$.

[5]:

```
x,y,a = symbols('x y a', real=True)

P = (Rational(-3,5)*a , Rational(6,5)*a)
f = -x*sqrt((a-x)/(a+x))
m = f.diff(x).subs(x,P[0])

Eq( y , m*(x - P[0]) + P[1] )
```

[5]:

$$y = -\frac{9a}{8} - \frac{31x}{8}$$

3. Trazar la tangente a la hipérbola $y = \frac{x+9}{x+5}$ de modo que atraviese el origen de coordenadas.

[6]:

```
x = symbols('x', real=True)
P = (0,0)
f = lambda x: (x + 9)/(x + 5)

solve( Eq( diff(f(x)) , (P[1] - f(x) )/(P[0] - x) ) , x )
```

[6]: $[-15, \ -3]$

[7]:

```
Eq( y , diff(f(x)).subs(x,_[0])*x) , Eq( y , diff(f(x)).subs(x,_[1])*x)
```

[7]: $\left(y = -\frac{x}{25}, \ y = -x\right)$

4. Encontrar la recta que pasa por el punto $ P(-1,1) $ y es tangente la curva: $ xy + 3y = x - 1 $.

[8]:
```
x,y = symbols('x y', real=True)

P = (-1,1)
f = solve( Eq(x*y + 3*y , x - 1) , y)[0]
df= f.diff(x)
x0 = solve( Eq( df , (P[1]-f)/(P[0]-x) ) , x)[0]

Eq(y , P[1] + df.subs(x,x0)*(x-P[0]) )
```

[8]: $y = 4x + 5$

2 Cuestionario

1. Determinar la ecuación de la recta que pasa por $(1, 3)$ y es tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 5x + 6$.
2. formar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ que sean perpendiculares a la recta: $2x + 4y - 3 = 0$.
3. Hay dos rectas que pasan por el punto $(-1, 3)$ que son tangentes a la curva $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$, obtenga una ecuación de cada una de estas rectas.

2.4_Maximos_y_minimos

January 23, 2021

1 Máximos y mínimos

1.1 Extremos absolutos

1.1.1 Definición

La función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tiene un valor máximo absoluto $f(c)$ donde:

$$c \in D \text{ Si } f(c) \geq f(x), \forall x \in D$$

1.1.2 Definición

La función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tiene un valor mínimo absoluto $f(c)$ donde:

$$c \in D \text{ Si } f(c) \leq f(x), \forall x \in D$$

1.2 Extremos relativos

Consideremos una función f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$

1.2.1 Definición

Diremos que $f(c)$ es un valor máximo relativo de la función f si existe un intervalo abierto $\langle c-\delta, c+\delta\rangle$ con $\delta > 0$ tal que $f(x)$ está definida y

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in \langle c-\delta, c+\delta\rangle$$

1.2.2 Definición

Diremos que $f(c)$ es un valor mínimo relativo de la función f si existe un intervalo abierto $\langle c-\delta, c+\delta\rangle$ con $\delta > 0$ tal que $f(x)$ está definida y

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in \langle c-\delta, c+\delta\rangle$$

1.3 Valores críticos

1.3.1 Teorema

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor mínimo absoluto y un valor máximo absoluto en el intervalo cerrado $[a,b $.

1.3.2 Teorema

Consideremos una función f continua en el intervalo abierto $\langle a, b\rangle$ y sea $c \in \langle a, b\rangle$. Si $f(c)$ es un extremo relativo de f, entonces $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

1.3.3 Definición

Un número c para el cual una función f está definida y además $f'(c) = 0$ o no existe, le llamaremos número crítico o valor crítico de f.

1.4 Valores intermedios

1.4.1 Teorema de Rolle

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $\langle a, b\rangle$; si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número $z \in \langle a, b\rangle$, tal que $f'(z) = 0$

1.4.2 Teor del valor intermedio

Sea f una función continua en $[a, b]$, derivable en $\langle a, b\rangle$ entonces $\exists\, z \in \langle a, b\rangle$, tal que

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

1.4.3 Teor de la función constante

Si $f'(x) = 0, \forall x$ en algún intervalo $\langle a, b\rangle$, entonces f es constante en $\langle a, b\rangle$

1.5 Funciones crecientes y decrecientes

1.5.1 Definición

Consideremos a una función definida en un intervalo I, entonces $f(x)$ es creciente en el intervalo; si para todo par x_1, x_2 del intervalo, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$

1.5.2 Definición

Consideremos a una función definida en un intervalo I, entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalo; si para todo par x_1, x_2 del intervalo, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$

1.5.3 Teorema

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b\rangle$, entonces:

- Si $f'(x) > 0, \forall x \in \langle a, b\rangle \Rightarrow f(x)$ es creciente en $\langle a, b\rangle$
- Si $f'(x) < 0, \forall x \in \langle a, b\rangle \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $\langle a, b\rangle$

1.6 Criterio de la primera y segunda derivada

Consideremos una función f continua en $[a, b]$ y sea $c \in \langle a, b\rangle$ un número crítico y $f'(x)$ está definida para todos los puntos de $\langle a, b\rangle$ excepto posiblemente en c, entonces:

- Si $\left.\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & , \forall x \in \langle a, c\rangle \\ f'(x) < 0 & , \forall x \in \langle c, b\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow f(c)$ es un máximo relativo de f

- Si $\left.\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & ,\forall x \in \langle a, c\rangle \\ f'(x) > 0 & ,\forall x \in \langle c, b\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow f(c)$ es un mínimo relativo de f
- Si $f'(x)$ no cambia de signo, cuando x pasa por c, entonces $f(c)$ no es un valor máximo ni mínimo relativo. El criterio falla.

Supóngase que existe f'' en algún intervalo abierto que contiene a c y que $f'(c) = 0$. Entonces:

- Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo relativo.
- Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo.

1. Determinar los extremos relativos de: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 23}{x - 4}$

[3]:
```
from sympy import *

init_printing()
x = symbols('x')
```

[11]:
```
f = (x**2 + 2*x - 23)/(x-4)
fp = diff(f,x)
```

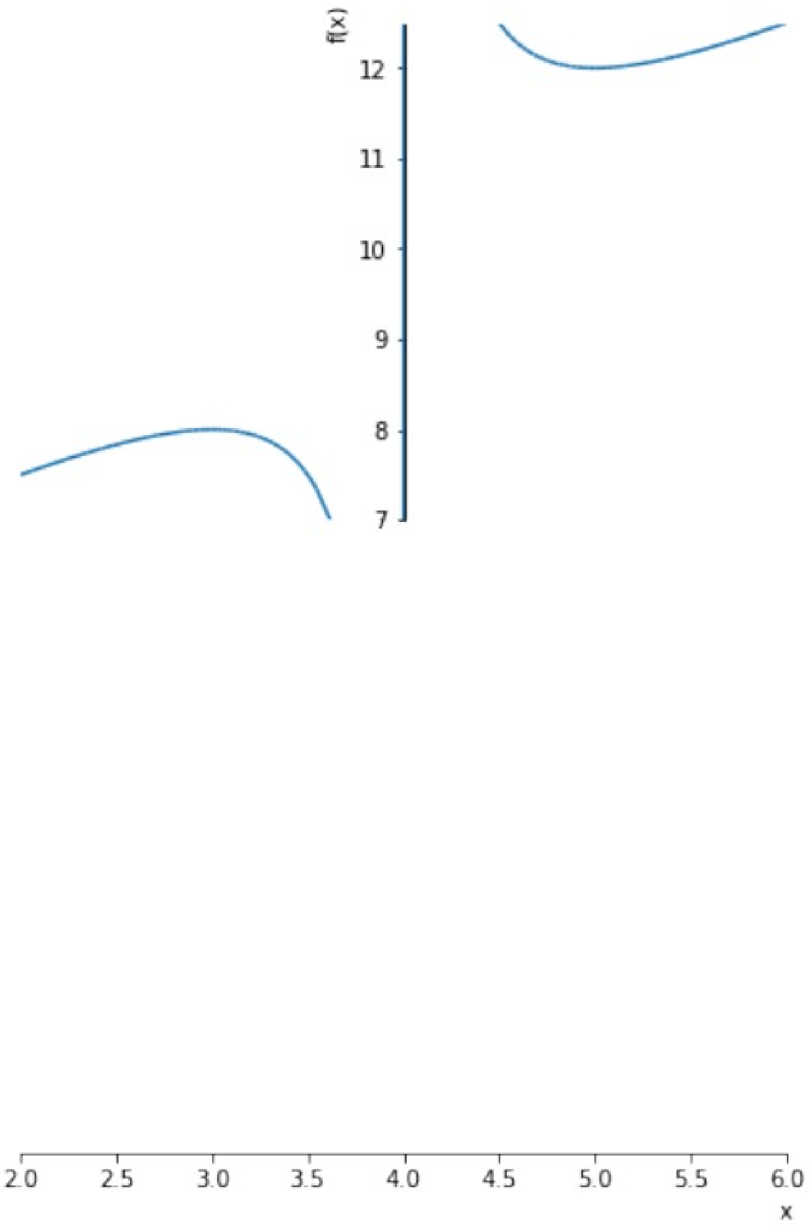
[13]:
```
S = solve(fp,x)
S
```

[13]: $[3, \ 5]$

[16]:
```
diff(fp,x).subs(x,S[0]) , diff(fp,x).subs(x,S[1])
```

[16]: $(-2, \ 2)$

[34]:
```
plot(f,(x,2,6),ylim=(7,12.5))
```



[34]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f887264f310>

2. Una recta $\mathcal{L}$ pasa por el punto $(2,5)$ y determina en el primer cuadrante un triangulo AOB. Determine la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ de modo que el

triangulo AOB tenga un área mínima.

[41]:
```
x,y,a,b = symbols('x y a b')

L = Eq( x/a + y/b , 1)
solve( L.subs({x:2,y:5}) , a)
```

[41]: $\left[\frac{2b}{b-5} \right]$

[42]:
```
A = b*_[0]/2  #funcion area
dA = A.diff()
solve( dA )
```

[42]: $[0, \ 10]$

[44]:
```
L.subs({a:Rational(2*10,10-5),b:10})
```

[44]: $\frac{x}{4} + \frac{y}{10} = 1$

3. Determinar la mínima distancia entre el punto $P = (0,0)$ y la hipérbola $\mathcal{H} : y = \frac{2}{x}$

[56]:
```
x = symbols('x', real=True)
P = (-1,-1)

D = sqrt( (x-P[0])**2 + (2/x - P[1])**2 )

solve(D.diff())
```

[56]: $\left[-\sqrt{2}, \ \sqrt{2} \right]$

[58]:
```
D.subs(x,sqrt(2)) , D.subs(x,-sqrt(2))
```

[58]: $\left(\sqrt{2} \left(1 + \sqrt{2} \right), \ \sqrt{2} \left(-1 + \sqrt{2} \right) \right)$

4. Determinar la mínima distancia entre el punto $P = (2,2)$ y la parábola $\mathcal{P} : y = 2\sqrt{x}$

[64]:
```
x = symbols('x', real=True)
P = [2,2]
D = sqrt((x-P[0])**2 + (2*sqrt(x) - P[1])**2)
solve(D.diff())
```

[64]: $\left[2^{\frac{2}{3}} \right]$

[65]:
```
D.subs(x,_[0]).simplify()
```

[65]: $\sqrt{8 - 6\sqrt[3]{2}}$

5. un alambre de longitud L es cortado en dos partes, con un parte se forma un cuadrado y con la otra una circunferencia. Cual sera el perímetro del cuadrado si la suma del cuadrado y del círcula sea mínima.

[85]:
```
x,L = symbols('x L', real=True)
A = x**2 + (L - 4*x)**2/(4*pi)
A
```

[85]:
$$x^2 + \frac{(L-4x)^2}{4\pi}$$

[86]:
```
solve( diff(A,x),x)
```

[86]:
$$\left[\frac{L}{\pi+4}\right]$$

El perímetro del cuadrado es: $\frac{4L}{\pi+4}$.

2 Cuestionario

1. Determinar los extremos relativos de $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{19}{3}x^3 - 42x^2$
2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P(3,4)$ y forma con el primer cuadrante un triángulo de área mínima.
3. Un punto movil P describe la curva $y = \frac{4}{x}, x > 0$. Determinar la distancia mínima de P al orígen.

2.5_Diferenciales

January 23, 2021

1 Diferenciales

Sea la función $y = f(x)$

Sea $\Delta x = x - x_1$, al cual denominaremos el incremento en la variable independiente.

$\Delta y = f(x) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

En general el incremento en la variable independiente es: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

1.0.1 Definición

La diferencial de x, es un incremento cualquiera en la variable independiente x, es decir:

$$dx = \Delta x$$

1.0.2 Definición

La diferencial de y, de la variable dependiente, es:

$$dy = f'(x)dx$$

1.1 Diferenciales como una proximación

Tenemos que $dx = \Delta x$, considerando que $\Delta y \approx dy$ tenemos $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$

Entonces:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

El error relativo: $\dfrac{dy}{f(x)}$

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{5+2x}}{x}$, aproximar $f(2.024)$
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2+1}$, aproximar $f(1.91)$

[2]:
```
from sympy import *

x = symbols('x')
init_printing()
```

[23]:
```
f = sqrt(5+2*x)/x
#f = sqrt(4*x+1)/(x**2+1)
f.diff().simplify()
```

[23]:

$$-\frac{x+5}{x^2\sqrt{2x+5}}$$

[24]:
```
X = 2
dX= 0.24
f.subs(x,X) + diff(f,x).subs(x,X)*dX
```

[24]:

$$1.36$$

[26]:
```
f.subs(x,2.024)
```

[26]:

$$1.48616075181982$$

Calcular el valor aproximado de:

1. $\sqrt{35.5}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{101}}$
3. $\sqrt{82}+\sqrt[4]{82}$
4. $\sqrt{\dfrac{(2.037)^2-3}{(2.037)^2+5}}$
5. $\dfrac{7+[5+(2.99)^3]^{1/5}}{[270-(2.99)^3]^{2/5}}$

[3]:
```
f = x**(1/2) + x**Rational(1,4)
f = sqrt((x**2 - 3)/(x**2 + 5))
#f = (7 + (5 + x**3)**Rational(1,5))/(270 - x**3)**Rational(2,5)
f
```

[3]:

$$\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}$$

[4]:
```
X = 2
dX= 0.037
f.subs(x,X) + diff(f,x).subs(x,X)*dX
```

[4]:

$$0.355259259259259$$

[15]:
```
f.subs(x,X+dX)
```

[15]:

$$0.999918075333284$$

La medida de la arista de una cubo es de 15cm, con un error posible de 0.01cm. Empleando diferenciales determine el error aproximado en calcular el volumen y el area del cubo.

[27]:
```
a = symbols('a')

V = a**3
A = 6*a**2

X = 15
dX= 0.01

print( V.diff().subs(a,X)*dX )
print( A.diff().subs(a,X)*dX )
```

```
6.75000000000000
1.80000000000000
```

La altura de un cono circular recto es el doble del radio de la base. Al medir se encontro que la altura es de 12cm con un posible error de 0.1 cm. Determinar el error aproximado en calcular el volumen.

[7]:
```
r,h = symbols('r h')
V = Rational(1,3)*pi*r**2*h
V = V.subs(r,h/2)

X = 12
dX= 0.1
V.diff().subs(h,X)*dX
```

[7]:

$$3.6\pi$$

Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta desde 5 a 5.06 centimetros. Hallar el valor aproximado del incremento del área.

[8]:
```
r = symbols('r')
A = pi*r**2

X = 5
dX= 0.06
A.diff().subs(r,X)*dX
```

[8]:

$$0.6\pi$$

Una bola de hielo de 10cm de radio, se derrite hasta que su radio adquiera el valor de 9.8cm. Hallar aproximadamente, la disminución que experimenta su volumen.

[10]:
```
r = symbols('r')
V = Rational(4,3)*pi*r**3

X = 10
dX= -0.2
V.diff().subs(r,X)*dX
```

[10]:

$$-80.0\pi$$

Un cilindro circular recto tiene 10 cm de altura, si el radio cambia de 2 a 2.06 cm. calcular el cambio aproximado correspondiente al volumen del cilindro y hallar el error porcentual de cambio en el volumen.

[17]:
```
r = symbols('r')
V = 10*pi*r**2

X = 2
dX = 0.06
dV = V.diff().subs(r,X)*dX

print('El cambio en el volumen: {}'.format(dV))
print('El error porcentual del cambio del volumen: {:.1f}%'.format(100*dV/V.
 ↪subs(r,X)))
```

```
El cambio en el volumen: 2.4*pi
El error porcentual del cambio del volumen: 6.0%
```

[ ]: